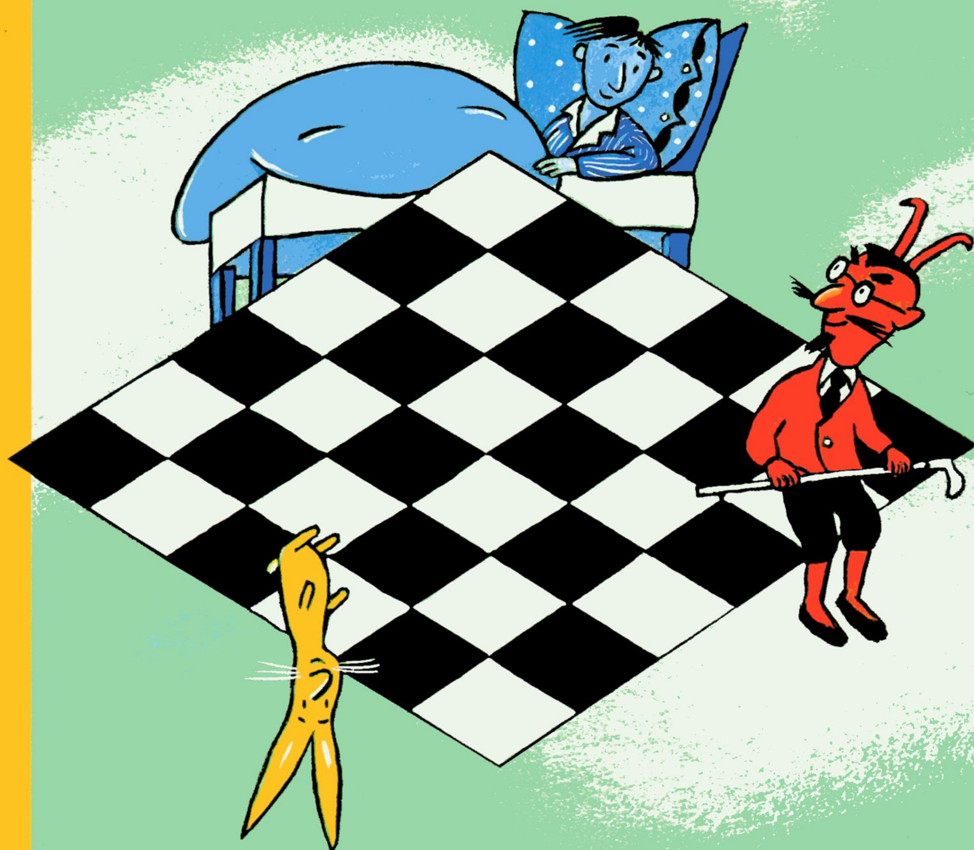
Hans Magnus Enzensberger

Skaičių kipšas

Sapnų knyga visiems,
kurie bijo matematikos



Alma littera

Matematika? Apsaugok Viešpatie! Vien šį žodį išgirdus daugeliui kyla noras slėptis po antklode. Kaip gaila! Taip buvo ir Robertui, mėlyna pižama vilkinčiam vaikinukui. Tačiau vieną naktį jis netikėtai susapnuoja Skaičių kipšą, ir šis dvylika naktų rodo tokius įdomius ir intriguojančius fokusus su nelemtais skaičiais, kad Robertui – ir skaitytojams – atsiskleidžia vis nauji dalykai.

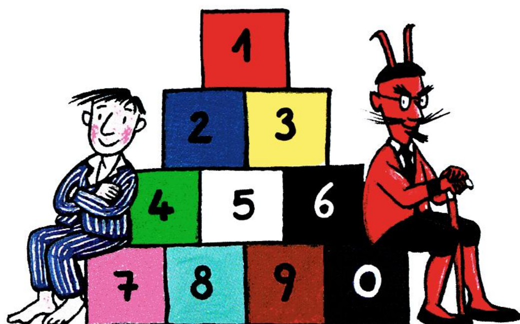
Ne, matematika anaiptol nėra košmaras.
Jos bijoti yra prietaras. Pakanka
Skaičių kipšui pakelti lazdelę,
ir baimės – kaip nebūta.

ISBN 9955-24-322-8
9 789955 243229

Hans Magnus Enzensberger

Skaičių kipšas

Sapnų knyga visiems,
kurie bijo matematikos



Iliustravo
Rotraut Susanne Berner

Iš vokiečių kalbos vertė
Valdemaras Kvietkauskas

Alma littera

UDK 51
En-115

Versta iš:
Hans Magnus Enzensberger
DER ZAHLENTEUFEL,
Carl Hanser Verlag München
Wien 1997

ISBN 9955-24-322-8

Skiriu Terezijai

Padėka

Autorius anaiptol nėra matematikas, todėl jaučia pareigą padėkoti tiems, kurie padėjo jam įsigilinti į kai kuriuos dalykus.

Ypač daug vertingų patarimų suteikė jo matematikos mokytojas Theo Renner, paties Sommerfeldo mokinys, kuris – ne taip kaip dr. Oželis – nuolat gyvu pavyzdžiu rodė, kad matematikoje viešpatauja džiaugsmas, o ne siaubas.

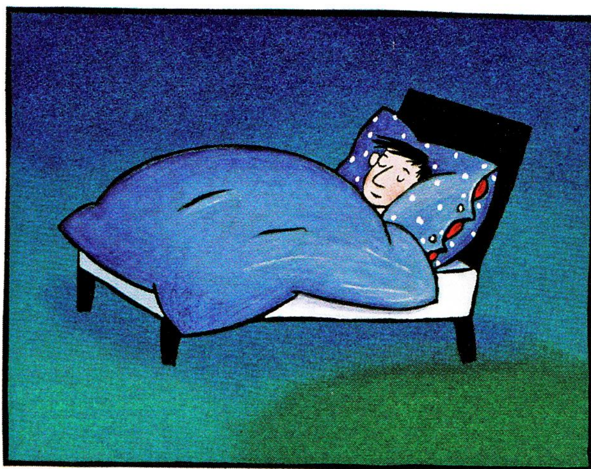
Iš vėlesnių skaičių kipšų, kurių veikalai autoriui pravertė, paminėtini: John H. Conway, Philip J. Davis, Keith Devlin, Ivar Ekeland, Richard K. Guy, Reuben Hersh, Konrad Jacobs, Theo Kempermann, Imre Lakatos, Benoît Mandelbrot, Heinz-Otto Peitgen ir Ian Stewart.

Pieter Moree, dirbantis Bonos Makso Planko matematikos institute, maloniai sutiko peržiūrėti tekstą ir ištaisė vieną kitą klaidą.

Savaime aišku, nė vienas iš minėtų kolegų nėra atsakingas už Roberto sapnus.

Miunchenas, 1996 metų ruduo H. M. E

Pirma naktis



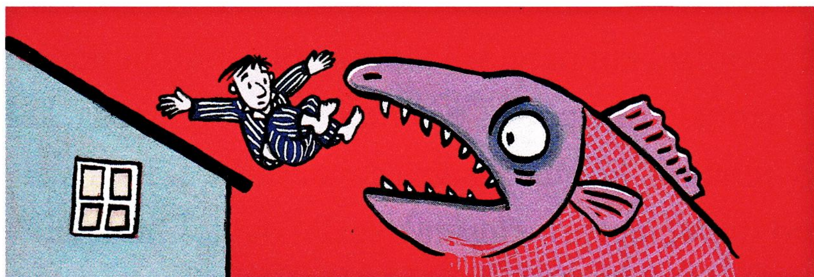
Sapnai kaip reikiant įgriso Robertui. Jis tarė sau: *vis gaunu per nosį.*

Pavyzdžiui, nuolat sapnuoja, kad jį praryja milžiniška atgrasi žuvis, o pastarąjį kartą dar ir šlykšti smarvė jo vos neuždusino. Arba slysta begaliniu šlaitu žemyn į prarają. Šauk nešaukęs *Stok!* arba *Gelbėkit!* – jokios naudos: leki ir leki, vis greičiau ir greičiau, kol pabundi visas šlapias nuo prakaito.

Sapnai krėtė piktus pokštus Robertui ir tada, kai jis mirtinai ko nors įsigeisdavo, tarkim, lenktyninio dviračio, turinčio mažiausiai dvidešimt aštuonias pavaras. Ir štai jis susapnuoja, kad jo išsvajotas dviratis, žvilgantis metalizuotu violetiniu laku, jau stovi rūsyje. Be galo tikroviškas sapnas! Štai jis ten, į kairę nuo vyno lentynos, ir Robertas žino net jo užrakto kodą: 12345. Juokų darbas tokį prisiminti! Vaikinas keliasi vidury nakties, užsimiegojęs nusikabina rūsio raktą, basas nušlepsi keturis laiptelius

žemyn – ir ką gi randa šalia vyno lentynos? Ogi pastipusią pelę. Kvailiau nesugalvosi!

Ilgainiui Robertas pramoko nesileisti mulkinamas. Vos tik susapnuoja, būdavo, ką nors tokio, tučtuojau nepabusdamas sumeta: aha, jau ir vėl toji bjauri sena žuvis. Puikiai žinau, kas dabar bus. Ji mane praris. Bet tai tik sapnas, o tikrovėje tos žuvies visai nėra ir praryti ji manęs negalėtų. Arba galvoja sau: ir vėl aš slystu ir niekaip negaliu sustoti, čia jau nieko nepadarysi, bet juk *iš tiesų* aš niekur neslystu.



Ir jeigu vėl Robertui prisisapnuoja tas stebuklingas dviratis arba itin trokštamas kompiuterinis žaidimas – antai guli ten, šalia telefono, ranka pasiekiamas, – jis jau suvokia, jog tai gryniausia apgaulė. Nė nepažvelgs į tą dviratį. Tegu sau stovi! Bet kad ir kaip įsigudrintum, vis tiek apmaudu, ir

gana, todėl Robertas ir nemėgo kalbėti apie savo sapnus.

Kol vieną dieną jam apsireiškė Skaičių kipšas.

Robertas net nudžiugo, kad šįsyk jau nesapnuoja alkanos žuvies ir nečiuožia nuo labai aukšto, labai siūbuojančio bokšto tiesiai į bedugnę. Sapnavo pievą. Bet labai keistą: žolynai aukšti aukšti, toli praaugę patį Robertą. Jis apsidairė ir tiesiai prieš save išvydo tokį mažą senučiuką, didumo sulig žiogu; žmogutis sėdėjo ant rūgštynės lapo, maskatavo kojomis ir aštriomis akutėmis stebeilijosi į vaikiną.

– Kas tu toks? – paklausė Robertas.

Žmogutis netikėtai garsiai šūktelėjo:

– Aš esu Skaičių kipšas!

Bet Robertas visai nenorėjo leistis į kalbas su tokiu nykštuku.

– Pirmiausia, – tarė jis, – Skaičių kipšo išvis nėra.

– Tikrai? Tai kodėl tu su manim šneki, jeigu manęs išvis nėra?

– O antra, man šlykštūs ir skaičiai, ir visa matematika.

– Ir kodėl gi?

– *Jeigu du kepėjai per šešias valandas iškepa 444 riestainius, tai per kiek laiko penki kepėjai iškeps 88 riestainius?* Kokios nesąmonės, – šaipėsi Robertas. – Kvailiausias būdas tuščiai gaišti laiką. Todėl dink man iš akių! Nešdinkis!

Skaičių kipšas grakščiai nušoko nuo rūgštynės lapo ir įsitaisė šalia Roberto, kuris jau supykęs sėdėjo ant žemės po žole, tokia aukšta kaip medis.

– Iš kur tu ištraukei tą riestainių pasaką? Ar tik ne iš mokyklos parsinešei?

– O iš kurgi dar, – atšovė Robertas. – Daktaras Oželis, tas nevykėlis, kuris mūsų klasei dėsto matematiką, amžinai alkanas, nors jau ir taip baisiai storas. Kai jis mano, kad mes įnikę sprendžiam uždavinį, skaičiuojam ir nieko nematom, kaskart vogčiom išsitraukia iš portfelio riestainį ir jį sušlamščia.

– Mat kaip, – tarė Skaičių kipšas ir nusišiepė. – Ne mano dalykas peikti tavo mokytoją, bet su matematika tai iš tiesų neturi nieko bendro. Žinok, kad dauguma tikrų matematikų net ir skaičiuoti nemoka. O jei ir mokėtų, ar verta gaišti brangų laiką? Kam tada skaičiuotuvai? Galgi tu jo neturi?

Robertas išvydo senučiuką, didumo sulig žiogu; jis sėdėjo ant rūgštynės lapo, maskatavo kojomis ir aštriomis akutėmis stebeilijosi į vaikiną.

– Turiu, bet mokykloj neleidžia jais naudotis.

– Aha, – atsiliepė Skaičių kipšas. – Nieko tokio. Visai ne pro šalį kai kada ir daugybos lentelę prisiminti, ypač kai išsenka baterija. Bet matematika, mielasis, tai visai kas kita!

– Veltui mane įkalbinėji, – spyrėsi Robertas. – Nepasitikiu aš tavim. Jeigu dar ir sapne spausi mane prie namų darbų, aš šauksiu. Atsakysi už vaikų kankinimą!

– Jei būčiau žinojęs, kad tu toks bailiukas, – tarė Skaičių kipšas, – išvis nebūtum manęs pamatęs. Juk aš tenorėjau su tavim mažumėlę pasišnekučiuoti. Naktimis dažniausiai nieko neveikiu, va ir pagalvojau: nagi užsuksiu pas Robertą, jam jau tikriausiai pabodo vis į tą pačią bedugnę lėkti.

– Čia tai jau atspėjai.

– Na matai.

– Bet tik nebandyk manęs apmauti, – šūktelėjo Robertas. – Nepavyks.

Kadgi pašoks Skaičių kipšas išgirdęs tokius žodžius! Pasirodo, ne toks jau jis ir mažas.

– Su velniu šitaip nekalbama, – sviedė jis piktai.

Skaičių kipšas įnirtingai trypė žolę, o jo akys svaidė žaibus.

– Atsiprašau, – sumurmėjo Robertas.

Vis dėlto jam pasidarė baisoka.

– Jei galima šnekučiuoti apie matematiką taip pat paprastai kaip apie filmus arba dviračius, tai kam čia dar tas velnias?

– Kaip tik todėl, mielasis, – atšovė seneliukas, – kad skaičiai tokie velnioniškai paprasti. Iš tiesų nereikia nė skaičiuotuvo. Pradžioje tau pakaks vienintelio dalyko, būtent vieneto. Iš jo gali išgauti ką tik nori. Jeigu tave, tarkim, gąsdina dideli skaičiai, pavyzdžiui, penki milijonai septyni šimtai dvidešimt trys tūkstančiai aštuoni šimtai dvylika, gali paprasčiausiai pradėti taip:

1 + 1
1 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1 + 1
...

ir varyti toliau, kol prieisi tuos penkis milijonus su visais tūkstančiais. Tik gal nesakysi, jog tai per daug sudėtinga! Tiek dar suprastų net paskutinis kvailys. Ar ne?

– Tai jau, – pripažino Robertas.

– Ir tai dar ne viskas, – toliau šnekėjo Skaičių kipšas. Dabar jis laikė rankoj lazdelę su sidabriniu bumbulu ir mojavo ja Robertui prieš nosį.

– Kai prieisi tuos penkis milijonus su viršum, galėsi skaičiuoti toliau. Ir pamatysi, kad pabaigos nėra. Mat skaičių yra be galo daug.

Robertas suabejojo – tikėti ar ne.

– O iš kur tu žinai? – paklausė jis. – Ar bandei?

– Ne, nebandžiau. Ir per ilgai truktų, ir visai to nereikia.

Kažkas čia ne taip, pagalvojo Robertas.

– Arba aš galiu skaičiuoti iki galo, vadinasi, skaičių nėra be galo daug, – svarstė jis, – arba jų yra be galo daug, ir tada aš negaliu skaičiuoti iki galo.

– Netiesa! – riktelėjo Skaičių kipšas. Jo ūsai pasišiaušė, veidas išraudo, galva iš to įniršio ėmė pūstis ir darėsi vis didesnė.

– Netiesa? Kodėl? – paklausė Robertas.

– Asile! Kaip manai, kiek kramtomosios gumos gabalėlių iki šios dienos sukramtyta visame pasaulyje?

– Nežinau.

– Na, bent apytiksliai.

– Baisiai daug, – atsakė Robertas. – Vien mūsų klasėje kramto ir Albertas, ir Beata, ir Cecilija, o

kiek visame mūsų mieste, visoj Vokietijoj, ir dar Amerikoj... Milijardai.

– Mažų mažiausiai, – pritarė Skaičių kipšas. – Dabar įsivaizduokim, kad priėjom iki paskutinio kramtomosios gumos gabalėlio. Ką aš darau? Išsitraukiu iš kišenės dar vieną pakelį, ir jau turim visų iki šiol sukramtytų gumos gabalėlių skaičių plius vienas, tai yra vienetu didesnį. Supratai? Man nė nereikia tų gumų skaičiuoti. Aš tiesiog nurodau, ką daryti toliau. Tiek tau ir pakanka.

Robertas valandėlę pamąstė ir pripažino, kad seneliukas teisus.

– Beje, galima eiti ir priešinga kryptimi, – pridūrė žmogelis.

– Kokia dar priešinga kryptimi?

– Matai, Robertai, – vėl pašaipiai tarė Skaičių kipšas, – yra ne tik be galo didelių skaičių, bet ir be galo mažų. Jų taip pat be galo daug.

Sulig tais žodžiais senolis ėmė sukti lazdą Robertui priešais nosį kaip kokį propelerį.

Ar tik neapsvaigs man galva, pamanė Robertas. Vėl tas pats jausmas, kurį jis tiek sykių buvo patyręs, kai nesulaikomai slysdavo bedugnėn.

– Gana! – suklykė jis.

– Ko taip susijaudinai, Robertai? Juk čia visai nieko blogo. Tik pažiūrėk, štai aš imu naują kramtomosios gumos paką...

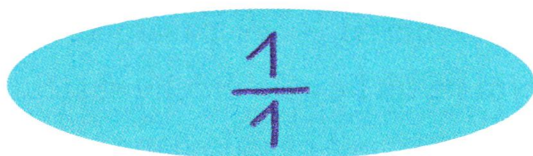
Ir nesumelavo – išsitraukė iš kišenės tikrą kramtomosios gumos gabalą, tik labai jau keistą: didumo sulig lentyna, įtartinai violetinį ir kietą kaip akmuo.

– Argi čia kramtomoji guma?

– Susapnuota kramtomoji guma, – paaiškino Skaičių kipšas. – Dabar aš ją pasidalysiu su tavim. Žiūrėk. Kol kas tai dar vienas gabalas. *Mano* kramtomoji guma. Vienas žmogus, viena guma.

Jis paėmė gabalėlį įtartinai violetinės kreidos, pasmeigė ją ant savo lazdelės galo ir kalbėjo toliau:

– Tatai užrašoma taip:



Abu vienetus jis brūkštelėjo tiesiai ant dangaus, visai kaip tie lėktuvai, kurie išraito ore reklamos tekstus. Violetiniai ženklai pleveno baltų debesų fone, o paskui palengva išskydo kaip gervuogių ledai.

Robertas spoksojo į dangų.

– Pasiutimas, – pareiškė jis. – Neprošal būtų ir man tokia lazdelė.

– Nieko čia ypatingo. Su šituo pagaikščiu rašau ant ko tik noriu – ant debesų, namų, ekranų. Nereikia man nei bloknoto, nei portfelio. Bet ne apie tai dabar kalbam! Pažiūrėk verčiau į kramtomąją gumą. Dabar aš ją perlaužiu ir turėsim abudu po pusę. Viena guma, du žmonės. Kramtomąją gumą rašom viršuj, o žmones – apačioj:

$$\frac{1}{1+1}$$

Dabar, ko gero, ir kiti norės gauti savo dalį – tavo klasės draugai.

– Albertas ir Beata, – pritarė Robertas.

– Kaip nori. Vadinasi, Albertas dalysis su tavim, o Beata – su manim. Visiems teks po ketvirtadalį:

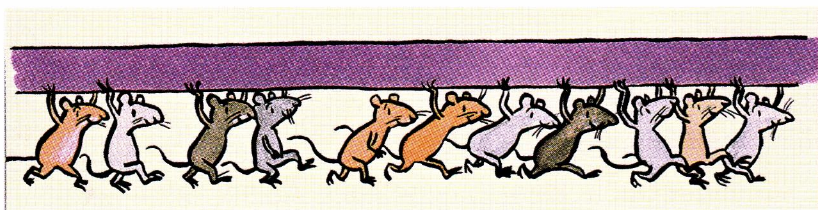
$$\frac{1}{1+1+1+1}$$

Žinoma, tai dar toli gražu ne pabaiga. Prisistatys vis daugiau prašytojų: *ir man, ir man!* Pirmiausia iš tavo klasės, paskui sueis visa mokykla, visas mies-

tas. Kiekvienas iš mūsų keturių turės atiduoti pusę savo ketvirtadalio, paskui pusę tos pusės, pusę pusės tos pusės ir taip toliau.

– Taigi čia daina be galo, – nusprendė Robertas.

– Netrukus gumos gabaliukai bus jau tokie mažulyčiai, kad plika akim nebeįžiūrėsi. Bet tai nieko nereiškia. Mes juos vis dalysim ir dalysim, kol bent po trupinėlį gaus kiekvienas iš šešių milijardų žmonių, gyvenančių Žemėje. O tada į eilę stos šeši šimtai milijardų pelių – juk joms irgi bent kiek priklauso. Matai, šitaip niekada neprieisim galo.



Senukas tik rašė ir rašė savąja lazdele vis naujus vienetus po begaliniu violetiniu brūkšniu, nutįsusiu per visą dangų.

– Tu užterši visą pasaulį, – išsigando Robertas.

– Še tau! – pasipiktino Skaičių kipšas ir ėmė dar labiau pūstis. – O juk aš tai darau vien dėl tavęs! Tu gi, ne kas kitas, taip bijai matematikos ir nori, kad viskas būtų kuo paprasčiau, nes kitaip tuoj imtum painiotis.

– Bet kai išvien tik vienetai ir vienetai, darosi nuobodu. Ir lėtokai judam į priekį, – išdrįso paprieštarauti Robertas.

– Sakai? – tarė senolis ir atsainiai mostelėjo ranka per dangų, nubraukdamas visus vienetus. – Žinoma, būtų praktiškiau sugalvoti ką nors geresnio, užuot vis rašius 1 + 1 + 1 + 1... Todėl aš ir išradau visus kitus skaitmenis.

– Tu? Tu sakaisi išradęs skaitmenis? Atleisk, bet negaliu tuo patikėti.

– Na, – pakraipė galvą Skaičių kipšas, – ar aš, ar kas kitas, koks skirtumas? Kodėl tu vis netiki? Jei nori, parodysiu, kaip vien iš vienetų padaromi visi kiti skaitmenys.

– Ir kaip tu tai padarysi?

– Labai paprastai. Žiūrėk:

$$1 \times 1 = 1$$

O paskui taip:

$$11 \times 11$$

Dabar tau tikriausiai prireiks kišeninio skaičiuotuvo.

– Čia vieni niekai, – gūžtelėjo pečiais Robertas.

$$11 \times 11 = 121$$

– Matai, – tarė Skaičių kipšas, – jau ir pasidarei dvejetą iš tų pačių vienetų. O dabar pasakyk man, kiek bus:

$$111 \times 111$$

– Nieko nebus, – atsiduso Robertas. – Šito mintinai nesuskaičiuosiu.

– Tada paimk skaičiuotuvą.

– Iš kur aš jį gausiu? Į sapną skaičiuotuvo nepasiimsi.

– Še, imk mano, – pasakė Skaičių kipšas ir įspraudė jam į delną aparatėlį. Skaičiuotuvas buvo keistas – minkštas, sakytum iš tešlos, aitriai žalios spalvos ir lipnus, bet veikė. Robertas spustelėjo:

$$111 \times 111$$

Ir koks rezultatas?

$$12321$$

– Tai bent, – nudžiugo Robertas. – Dabar turim jau ir trejetą.

– Na matai. O dabar taip varyk ir toliau.

Robertas tik spaudė ir spaudė:

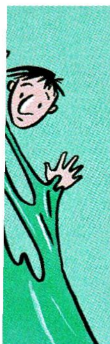
$$1111 \times 1111 = 1234321$$

$$11111 \times 11111 = 123454321$$

– Puiku! – Skaičių kipšas patapšnojo Robertui per petį. – Be to, čia yra dar viena įdomybė. Tikriausiai jau ir pats būsi pastebėjęs. Mat jeigu taip darysi ir toliau, ne tik išgausi visus skaitmenis nuo nulio iki devynių, bet ir galėsi tą patį rezultatą perskaityti tiek iš kairės į dešinę, tiek iš dešinės į kairę, lygiai kaip žodžius *sūnūs, malam* arba *tikėkit.*

Robertas daugino toliau, vis ilgindamas skaičius, bet priėjus iki

$$1111111 \times 1111111$$



skaičiuotuvas išleido kvapą. Jis tik gailiai atsiduso *pšš...*, virto aitriai žalia tyrele ir pamažu išskydo.

– Velniava! – šūktelėjo Robertas ir nosine nusišluostė žaliai išterliotus pirštus.

– Tau reikėtų didesnės mašinėlės. Padoriam kompiuteriui tai būtų juokų darbas.

– Tikrai?

– Žinoma, – patvirtino Skaičių kipšas.

– Vis toliau ir toliau? – paklausė Robertas. – Taip galima tęsti iki begalybės?

– Žinoma.

– Ar pats jau bandei dauginti, pavyzdžiui, tiek?

11 111 111 111 × 11 111 111 111

– Ne, nebandžiau.

– Tai dar kažin ar pavyktų, – suabejojo Robertas.

Skaičių kipšas pabandė sudauginti mintinai, bet vėl ėmė grėsmingai tvinkti; pirmiausia išsipūtė galva, paskui ir visas kūnas tapo panašus į raudoną balioną. Turbūt iš piktumo, pamanė Robertas, o gal tik persistengė.

– Kad tave kur, – sumurmėjo senolis. – Išeina kažkokia makalynė. Prakeikimas! Tavo teisybė, niekaip nepavyksta. Kaip tu sužinojai?

– Nieko aš nesužinojau, – tarė Robertas. – Tiesiog atspėjau. Kvailas būčiau leistis į tokius skaičiavimus.

– Gėdykis! Matematikai nespėlioja, supratai? Matematikai įrodinėja!

– Bet juk pats tvirtinai, kad taip galima tęsti ir tęsti iki begalybės. Argi tai nebuvo spėjimas?

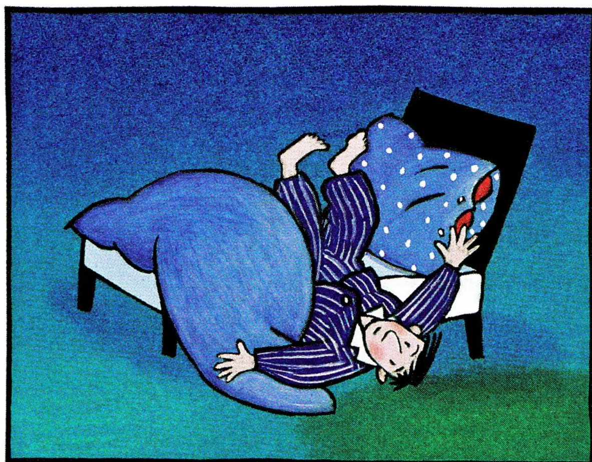
– Ką tu čia prasimanai? Apskritai, kas tu per vienas? Visiškas naujokas, nieko neišmanai ir dar pasišauni mane mokyti!

Sulig kiekvienu išrėktu žodžiu Skaičių kipšas vis augo ir pūtėsi, duso ir gaudė orą. Robertui darėsi nejauku.

– Skaičių menkysta! Bukagalvis! Uodo išnara! – klykė senis ir vos ištaręs paskutinį žodį sprogo iš pasiutimo su dideliu trenksmu.

Robertas iškrito iš lovos ir pabudo. Jam mažumėlę svaigo galva, bet vis tiek buvo smagu paguldžius ant menčių Skaičių kipšą.

Antra naktis



Ir vėl slydo žemyn Robertas. Kas naktį vis tas pats: vos tik užmiegi, jau ir prasideda. Leki ir negali sustoti. Šįsyk tai buvo kartis, tokia, kokia kabo nuo sporto salės lubų. Tik nežiūrėk žemyn, kartojo sau Robertas, tvirtai gniaužė kartį ir vis tiek kriste krito... Pagaliau dunkstelėjo į minkštas samanas ir išgirdo kikenant. Priešais jį ant rudos aksominės grybo kepurės sėdėjo Skaičių kipšas, mažesnis nei aną kartą matytas, ir dėbsojo į vaikiną smailiomis akutėmis.

– O iš kur *tu* čia dabar? – paklausė jis Robertą. Šis parodė į viršų. Kartis šovė toli aukštyn, ir vaikinas pamatė, kad viršuje ji baigiasi įkypu brūkšniu. Robertas atsidūrė lyg ir miškelyje, tik vietoj medžių – milžiniški vienetai.

Ore kažkas dūzgė: pasirodo, tai maži skaičiukai tarsi uodai zuja Robertui apie galvą. Jis vaikė juos abiem rankom, bet kur tu nuvaikysi tokią gausybę! Vaikinas juto, kaip jam per odą braukia vis dau-

giau mažyčių dvejetukų, trejetukų, ketvertukų, penketukų, šešetukų, septynetukų, aštuonetukų ir devynetukų. Robertas visuomet dygėjosi kandimis ir naktiniais drugiais, tad ir dabar stengėsi tų vabalėlių per arti neprisileisti.

– Ar jie tau trukdo? – paklausė kipšas. Jis tik ištiesė geibią rankelę ir nubraukė skaičiukus. Ore kaipmat nebeliko nieko, tik didžiuliai lyg medžiai vienetai styrojo vos ne iki dangaus.

– Sėskis, Robertai, – tarė Skaičių kipšas. Šįsyk jis elgėsi netikėtai maloniai.

– Kur? Ant grybo?

– Kodėl gi ne?

– Bet juk tai nesąmonės, – sudejavo Robertas. – Kur mes esam? Pasakų knygoj? Praėjusį kartą tu sėdėjai ant rūgštynės lapo, dabar kvieti mane sėstis ant grybo. Tai man kažkur girdėta, lyg ir esu apie tai skaitęs.

– Ar tik nebus tai grybas iš „Alisos stebuklų šalyje“, – priminė Skaičių kipšas.

– Velniai žino, ką bendra turi tos pasakos su matematika, – sumurmėjo Robertas.

– Taip atsitinka sapnuose, mielasis! Gal manai, kad tai *aš* sugalvojau visus tuos mašalus? Kas da-

Tik nežiūrėk žemyn, kartojo sau Robertas, tvirtai gniaužė kartį ir vis tiek kriste krito... Jis atsidūrė lyg ir miškelyje, tik vietoj medžių – milžiniški vienetai.

bar guli lovoj, miega ir sapnuoja – aš ar tu? Aš, kaip matai, budrus ir žvalus! Tai ką gi, taip ir stypsosi visą laiką?

Robertas suprato, kad senis teisus, ir užsikabarojo ant artimiausio grybo. Šis buvo didžiulis, minkštas, kuprotas ir patogus kaip fotelis.

– Na ir kaip, ar patinka?

– Neblogai, – tarė Robertas. – Aš tik svarstau, kas visa tai sugalvojo, tuos skaičius mašalus ir tą vieneto pavidalo kartį, kuria aš nučiuožiau. Ką nors panašaus susapnuoti man nė į galvą nešautų. Tai tavo darbas!

– Gal ir taip, – sutiko Skaičių kipšas ir patenkintas pasirąžė ant savo grybo. – Bet čia dar kai ko trūksta!

– Ko gi?

– Nulio.

Ir tikrai: tarp visų tų uodų ir kandžių nebuvo nė vieno nulio.

– O kodėl? – pasmalsavo Robertas.

– Todėl, kad nulį žmonės ėmė vartoti daug vėliau negu kitus skaitmenis. Ir nieko nuostabaus, juk nulis – pats gudriausias skaičius. Nagi žvilgtelėk!

Ir kipšas vėl ėmė savo lazdele rašyti danguje, kaip tik ten, kur jo neužstojo medžiai vienetai:

MCM

– Kelintais metais tu gimei, Robertai?

– Ar aš? 1986-aisiais, – kiek nenoromis atsakė Robertas.

Ir senolis parašė:

MCMLXXXVI

– Jau žinau, – sušuko Robertas. – Tai senoviški skaitmenys, esu tokių matęs iškaltų antkapiuose.

– Juos sugalvojo senovės romėnai. Ir vargdavo su jais. Bloga jau vien tai, kad romėniškus skaičius nelengva perskaityti. Bet šį skaičių turbūt perskaitytum?

I

– Vienas, – tarė Robertas.

– O šitą?

X

– X reiškia dešimtį.

– Na matai. Vadinasi, tu, mielasis, esi gimęs

MCMLXXXVI

metais.

– Viešpatie, kaip sudėtinga, – sudejavo Robertas.

– Taigi. O ar žinai kodėl? Nes romėnai nežinojo nulio.

– Nesuprantu tavęs. Ir apskritai, ko tu vis kaišioji tą nulį? Juk nulis – tai niekas.

– Tiesa. Dėl to nulis ir genialus.

– Bet kodėl nulis yra skaičius? Kaip galima suskaičiuoti nieką?

– Ko gero, vis dėlto galima. Tik ne taip lengva iki to nulio prisikasti. Na, bet pabandykim. Ar dar prisimeni, kaip dalijom tą didžiulę kramtomąją gumą milijardams žmonių (apie peles jau nė nekalbu)? Porcijos tolydžio mažėjo, kol tapo tokios mažulytės, kad nebūtum įžiūrėjęs net pro mikroskopą. Ir vis tiek galėjom dalyti toliau, bet to nieko – nulio – niekada nebūtume priėję. Visai arti arti prisigavę, bet vis tiek nepasiekę.

– Na ir kas? – purkštelėjo Robertas.

– Ogi tas, kad reikia eiti iš kitos pusės. Gal pabandykim su minusu. Taip bus lengviau.

Kipšas ištiesė lazdelę ir palietė vieną iš tų didžiųjų vienetų. Šis tuoj ėmė trauktis, mažėti ir štai jau stovi šalia Roberto – nedidukas toks, ranka pasiekiamas ir paimamas.

– Nagi, dabar imk ir skaičiuok.

– Nežinau, kaip skaičiuoti, – gynėsi Robertas.

– Nepliaukšk niekų.

$$1 - 1 =$$

– Vienas minus vienas yra nulis, – tarė Robertas. – Aišku kaip dieną.

– Matai? Be nulio nesuskaičiuotum.

– Tačiau kam tą nulį rašyti? Jei nieko nelieka, nieko ir nerašom. Kam dar ypatingas skaičius, reiškiantis tai, ko nėra?

– Tada suskaičiuok, kiek bus

$$1 - 2 =$$

– Vienas minus du yra minus vienas.

– Teisybė. Tik va – be nulio tavo skaičių seka atrodys taip:

$$\ldots 4, 3, 2, 1, -1, -2, -3, -4 \ldots$$

4 ir 3 skiriasi vienetu, 3 ir 2 – taip pat vienetu, 2 ir 1 – irgi vienetu, o 1 ir –1?

– Dviem, – atsakė Robertas.

– Vadinasi, tarp 1 ir –1 praleidai vieną skaičių.

– Nulį, kad jį kur! – sušuko Robertas.

– Sakiau gi tau, kad be jo nieko neišeis. Vargšai romėnai taip pat manė, kad nereikia jokio nulio. Užtat ir negalėjo parašyti žmoniškai: 1986, turėjo vargti su visais tais M ir C, L, X ir V.

– Bet kuo čia dėta mūsų kramtomoji guma ir minusas? – nekantravo Robertas.

– Pamiršk kramtomąją gumą. Pamiršk minusą. Tu dar pamatysi, ko iš tiesų vertas nulis. Bet reikės pasukti galvelę, mielasis. Ar pajėgsi, o gal jau pavargai?

– Ne, – atsakė Robertas. – Man smagu, kad nebeslystu žemyn. O ant to grybo, pasirodo, net ir visai patogu.

– Na ir šaunu. Tada norėčiau duoti tau dar vieną uždavinuką.

Ko čia dabar tas senis meilikauja, pagalvojo Robertas. Ar tik neketina manęs mulkinti!

– Nagi varyk, – tarė jis.

Ir Skaičių kipšas parašė:

$$9 + 1 =$$

– Vieni niekai, – atšovė Robertas. – Dešimt!

– O kaip tai užrašytum?

– Kadgi neturiu tušinuko.

– Ne bėda, rašyk tiesiai ant dangaus. Še, imk mano lazdelę.

$$9 + 1 = 10$$

parašė Robertas danguje violetiniu debesų rašikliu.

– Kaip čia dabar? – nusistebėjo Skaičių kipšas. – Kodėl vienetas ir nulis? Juk vienas plius nulis nelygu dešimčiai.

– Nesąmonė, – šūktelėjo Robertas. – Juk čia ne vienas *plius* nulis, bet vienetas su nuliu, o tai yra dešimt.

– Ir kodėl gi, leisk paklausti, tai yra dešimt?

– Todėl, kad taip rašoma.

– O kodėl taip rašoma? Ar gali man pasakyti?

– Kodėl, kodėl, kodėl... Tu mane nervini, – sudejavo Robertas.

– Gal norėtum sužinoti? – pasiteiravo Skaičių kipšas ir patogiai atsidrėbė ant savo grybo.

Stojo tyla. Pagaliau Robertas neištvėrė.

– Sakyk gi pagaliau! – paragino jis.

– Labai paprasta. Viską padaro šuoliai.

– Kokie šuoliai? – piktinosi Robertas. – Ką tu čia šneki! Bene skaičiai gali šokinėti?

– Tai yra šuoliai, nes *aš* juos taip vadinu. Nepamiršk, kieno žodis čia lemia. Ne veltui esu Skaičių kipšas, įsidėk galvon.

– Gerai jau, gerai, – ramino jį Robertas. – Vis dėlto paaiškink, ką tu vadini šuoliais.

– Tai klausyk. Geriausiai pradėkim vėl nuo vieneto. Arba, tiksliau sakant, nuo daugybos lentelės.

$$1 \times 1 = 1$$
$$1 \times 1 \times 1 = 1$$
$$1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Gali dauginti iš vieneto kiek tik nori kartų, vis tiek visuomet gausi vienetą.

– Aišku. Ir kas toliau?

– O dabar pamėgink tą patį su dvejetu.

– Gerai, – tarė Robertas.

$$2 \times 2 = 4$$
$$2 \times 2 \times 2 = 8$$
$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$
$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$
$$\ldots$$

– Labai jau sparčiai didėja skaičiai! Jei tik dar kiek toliau pavarysiu, žiūrėk, jau ir skaičiuotuvo prireiks.

– Neprireiks. Dar sparčiau didės rezultatas, jei vietoj dviejų pasirinksi penkis:

$$5 \times 5 = 25$$
$$5 \times 5 \times 5 = 125$$
$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$
$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$$
$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 15625$$

– Gana! – suriko Robertas.

– Ko tu vis išsigąsti pamatęs didelį skaičių? Dauguma didelių skaičių visai nekenksmingi.

– Tai dar kažin, – suabejojo Robertas. – Be to, kiekgi galima tą patį penketą vis dauginti ir dauginti patį iš savęs!

– Ir man, kaip Skaičių kipšui, tatai nepatinka. Todėl aš ir nekartoju vis to paties – man būtų pernelyg nuobodu, – o rašau taip:

$$5^1 = 5$$
$$5^2 = 25$$
$$5^3 = 125$$

ir taip toliau. Penki pirmu šuoliu, penki antru šuoliu, penki trečiu šuoliu. Kitaip sakant, šokdinu penketą. Supratai? O jau dešimtį šokdinti visai lengva. Eina kaip iš pypkės, nereikia nė skaičiuotuvo. Jei pašokdinsi dešimtį vieną kartą, ji tokia ir liks:

$$10^1 = 10$$

Dabar pašokdink ją du kartus:

$$10^2 = 100$$

Pašokdink tris kartus:

$$10^3 = 1000$$

– O aš dešimtį pašokdinsiu penkis kartus ir gausiu 100 000. Dar vieną sykį – ir jau turėsiu milijoną.

– Ir taip iki begalybės, – tarė Skaičių kipšas. – Matai, kaip lengva! Tuo nulis mane ir žavi. Matai bet kokį skaitmenį, matai jo vietą – ir jau žinai, kokia jo vertė: kuo kairiau, tuo didesnė, kuo dešiniau, tuo mažesnė. Parašius 555, paskutinis penketas reiškia penkis, ir tiek, priešpaskutinis – jau dešimteriopai daugiau, tai yra penkiasdešimt, o pirmasis penketas, visai kairėj, vertas jau šimtąkart daugiau už paskutinį, būtent penkių šimtų. O kodėl? Todėl, kad pasislinkęs į priekį, kairėn. O senovės romėnų penketas visada reiškė tik penkis, nes romėnai nemokėjo skaitmenų šokdinti. Ir nemokėjo todėl, kad neturėjo nulio. Štai kodėl jiems tekdavo rašyti tokius griozdiškus skaičius kaip MCMLXXXVI. Džiaukis, Robertai! Tau pasisekė. Turėdamas nulį ir pramokęs skaitmenis šokdinti, tu gali pats kurti

kokį tik nori paprastą skaičių, tiek didelį, tiek mažą. Na kad ir 786.

– Kam man tie 786?

– Žmogau, tik neapsimesk esąs kvailesnis, nei iš tikrųjų esi! Jei taip jau nori, užrašyk savo gimimo metus, 1986.

Senis vėl ėmė grėsmingai pūstis, kartu su juo ir grybas, ant kurio jis sėdi.

– Krutinkis! – staugė jis. – Greičiau!

Štai ir vėl prasideda, pagalvojo Robertas. Susierzinęs jis tampa nepakenčiamas, piktesnis už dr. Oželį. Ir nedrąsiai išvedžiojo danguje didelį vienetą.

– Blogai! – sušuko Skaičių kipšas. – Labai blogai! Už ką man ir pakliuvo šitoks avigalvis! Suprask gi, besmegeni, kad tau reikia susidaryti skaičių, o ne tik papiešti.

Robertas nieko nebenorėjo, tik kuo greičiau pabusti. Kodėl turėčiau leistis taip žeminamas, galvojo jis, o Skaičių kipšo makaulė, jau ir šiaip raudona, tvinko vis labiau.

– Nuo galo, – klykė senis.

Robertas niekaip nesuprato.

– Nuo galo pradėk, ne nuo pradžios.

– Ką gi, jei taip nori...

Robertas neketino su juo ginčytis, tad nutrynė vienetą ir parašė šešetą.

– Suvokei šiaip taip? Tada eisim toliau.

– Dėl manęs, – irzliai tarė Robertas. – Teisybę sakant, man labiau patiktų, jei tu taip nesikarščiuotum dėl kiekvieno menkniekio.

– Deja, – atsakė senis, – negaliu to pakeisti. Suprask, vis dėlto Skaičių kipšas – ne Kalėdų Senelis.

– Na, tai ar tau tinka mano šešetas?

Kipšas papurtė galvą ir apačioj prirašė:

$$6 \times 1 = 6$$

– Bet juk tai tas pat, – nusistebėjo Robertas.

– Tuoj pamatysi. Dabar eis aštuonetas. Tik nepamiršk pašokdinti!

Robertas jau sumetė, ką turi omeny senis, ir parašė:

$$8 \times 10 = 80$$

– Jau žinau, kaip daryti, – šūktelėjo jis, dar nespėjus seniui išsižioti. – Imu devynetą ir dukart pašokdinu dešimtuką. – Ir parašė:

$$9 \times 100 = 900$$

o paskui

$$1 \times 1000 = 1000$$

Čia jau trys šuoliai.

– Ir iš viso

$$6 + 80 + 900 + 1000 = 1986$$

Tikrai, ne taip jau ir sunku. Manau, įstengčiau ir be Skaičių kipšo.

– Sakai? Man rodos, jau per daug išpuikai, mielasis. Juk kol kas mes kalbėjom tik apie paprasčiausius skaičius. Juokų darbas! Pamatysi, kas bus, kai aš imsiu traukti iš burtų skrybėlės sutrupintuosius skaičius. Žinok, jų nepalyginti daugiau. O kur dar tariamieji skaičiai, paskui – neprotingieji skaičiai, kurių yra daugiau nei be galo daug – sunku net įsivaizduoti! Skaičiai, kurie be paliovos sukasi ratu, ir skaičiai, kurie niekaip nesibaigia!

Taip šnekėjo Skaičių kipšas ir viepėsi vis plačiau. Net ir dantis jau galėjai įžiūrėti jo burnoj, tų dantų be galo daug, o paskui senolis ėmė dar ir savo lazdele šmėžuoti Robertui prieš akis...

Taip šnekėjo Skaičių kipšas ir viepėsi vis plačiau. Net ir dantis jau galėjai įžiūrėti jo burnoj, tų dantų be galo daug.

– Gelbėkit! – sušuko Robertas ir pabudo. Dar visai užsimiegojęs tarė savo mamai: – Žinai, kuriais metais aš gimiau? 6 × 1 ir 8 × 10 ir 9 × 100 ir 1 × 1000.

– Ir kas tam mano berniukui pastaruoju metu pasidarė? – nusistebėjo Roberto mama, pakraipė galvą ir padavė jam puodelį kakavos. – Pasistiprink! Tauški čia visokias nesąmones.

Robertas išgėrė kakavą ir nutylėjo. Vis tiek mamai to neišaiškinsi, pamanė jis.

Trečia naktis

Robertui nė kiek netrukdė Skaičių kipšo apsilankymai per sapną. Priešingai! Teisybė, senis visada puikuojasi, kad viską geriau žino, nelabai malonūs ir jo įsiūčio priepuoliai. Niekad negali žinoti, kada jis ims pūstis ir šaukti, išraudęs kaip vėžys. Ir vis tiek tai geriau, kur kas geriau, nei būti gličios žuvies prarytam arba vis giliau slysti į juodą prarają.

Be to, Robertas užsispyrė įrodyti Skaičių kipšui, kai tik jį pamatys, ir pats esąs ne iš kelmo spirtas. Nušluostysiu nosį tam pasipūtėliui, murmėjo Robertas prieš užmigdamas. Pamanykit, tik nulis ir nulis, lyg čia būtų kažin kas. Ne kažkiek ir jis pats didesnis už nulį. Sapnų baidyklė, ir tiek! Užtenka tik pabusti – ir jau jo nebėr.

Tačiau nušluostyti nosį Skaičių kipšui Robertas galėjo tik jį susapnavęs, o kad susapnuotų, turėjo pirmiausia užmigti. Pasirodo, tai ne taip paprasta.

Ilgai Robertas vartėsi lovoj atviromis akimis. Dar niekada jam taip nebuvo atsitikę.

– Ko tu čia vis blaškaisi, ramiai neguli? – paklausė Skaičių kipšas.

Žiūri Robertas, kad jo lova urve bestovinti. O priešais sėdi kipšas ir lazdele mojuoja.

– Kelkis, Robertai, – paragino jis. – Šiandien imsimės dalybos!

– Ar būtinai? – suabejojo Robertas. – Galėjai bent jau palaukti, kol užmigsiu. O dalybos, žinok, labai nemėgstu.

– Kodėl gi?

– Matai, kai reikia sudėti, atimti arba sudauginti, visada viskas išeina. O dalijant ima ir atsiranda liekana. Man tai nepatinka.

– Reikia tik žinoti kada.

– Kas kada? – nesuprato Robertas.

– Kada liekana bus, o kada ne, – paaiškino Skaičių kipšas. – Čia visa esmė. Juk į kai kuriuos skaičius vos pažiūrėjęs matai, kad jie dalysis be liekanos.

– Žinau, – tarė Robertas. – Kiekvieną lyginį skaičių puikiausiai galima padalyti iš dviejų. Arba jei koks nors skaičius yra trečioje daugybos lentelės eilutėje, tai jį lengva padalyti iš trijų:

$$9 : 3$$
$$15 : 3$$

ir taip toliau. Tie patys skaičiai kaip dauginant, tik kita tvarka:

$$3 \times 5 = 15$$

Vadinasi,

$$15 : 3 = 5$$

Tai aš moku ir pats, be jokio Skaičių kipšo.

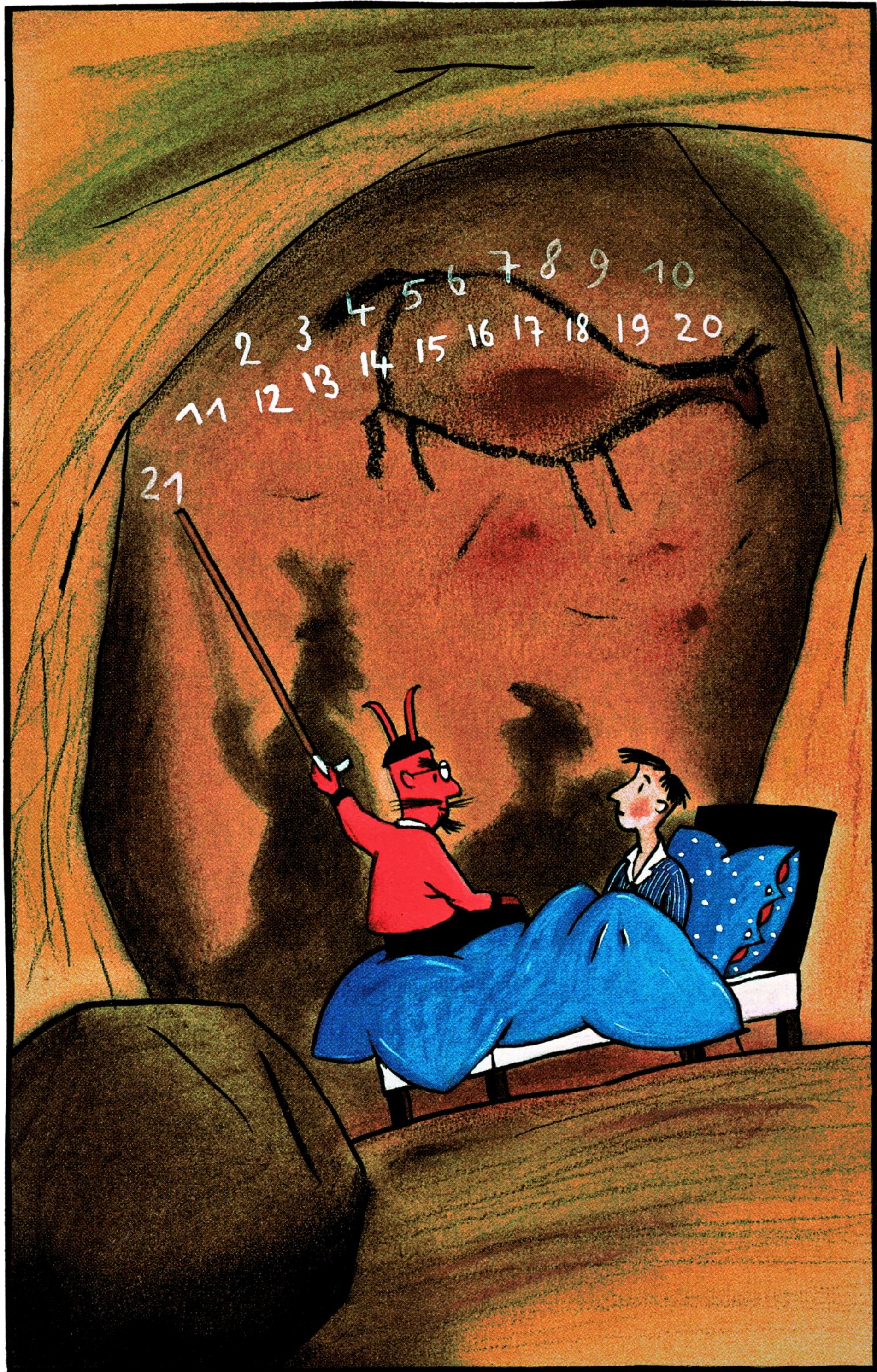
Verčiau būtų Robertas to nesakęs! Senis mikliai ištempė jį iš lovos. Kipšo ūsai kretėjo, nosis paraudo, jau, rodos, ir galva ėmė tinti.

– Nieko tu neišmanai, – rėkė jis. – Įsivaizduoji, kad jeigu jau iškalei daugybos lentelę, tai labai daug žinai! Nė velnio tu nežinai!

Štai ir vėl prasideda, apmaudãvo Robertas. Negana, kad ištraukia mane iš lovos, bet dar ir pyksta, kad neturiu noro dalyti kažkokių skaičių.

– Ateinu pas tą pradinuką geriausių norų vedamas, kad jį ko nors išmokyčiau, ir vos tik išsižioju, jis ima man akis draskyti.

– Taip tu rodai gerus norus? – tarė Robertas.



Robertui užvis labiau norėjosi pabėgti. Bet kaipgi pabėgsi iš sapno? Apsidairė po urvą, bet niekur nematė išėjimo.

Jam užvis labiau norėjosi pabėgti. Bet kaipgi pabėgsi iš sapno? Apsidairė po urvą, bet niekur nematė išėjimo.

– Kur čia susiruošei?

– Laukan.

– Jei tu dabar paspruksi, – pagrasino Skaičių kipšas, – nebepamatysi manęs niekada! Dėl manęs gali sau nuobodžiauti ligi apkvaišimo pas savo daktarą Oželį ir krimsti riestainius, kol susivemsi.

Duok kvailiui kelią, pagalvojo Robertas.

– Atsiprašau, – tarė jis. – Nenorėjau tavęs įžeisti.

– Gerai jau.

Kaip ūmiai užėjo kipšui siutas, taip ūmiai ir atlėgo.

– Devyniolika, – bambėjo jis. – Išmėgink 19. Ar galėtum padalyti į lygias dalis, kad nieko neliktų?

Robertas pamąstė.

– Nebent vienu būdu, – atsakė pagaliau. – Jei padalyčiau į devyniolika lygių dalių.

– Taip netinka, – atkirto Skaičių kipšas.

– Arba jei padalyčiau iš nulio.

– Nieku gyvu.

– Kodėl gi?

– Todėl, kad tai uždrausta. Dalyti iš nulio griežtai draudžiama.

– O jei aš vis dėlto padalyčiau?

– Tada sugriūtų visa matematika!

Ir vėl Skaičių kipšas ėmė karščiuotis, bet, laimei, susivaldė ir prašneko:

– Tu tik pamąstyk. Kiek turėtum gauti padalijęs 19 iš nulio?

– Nežinau. Gal šimtą, gal nulį, o gal kokį nors skaičių tarp tųdviejų.

– Pirma esi man sakęs, kad būna tie patys skaičiai kaip dauginant, tik kita tvarka. Jeigu

$$3 \times 5 = 15$$

tai turi būti

$$15 : 3 = 5$$

Dabar pamėgink padaryti tą patį su 19 ir nuliu!

Robertas ėmė skaičiuoti:

– 19 padalijus iš nulio bus, tarkim, 190.

– O atvirkščiai?

– 190 padauginus iš nulio... 190 kartų po nulį... bus nulis.

– Matai? Kad ir kokį skaičių imtum, visada gausi tik nulį ir niekada negausi devyniolikos. Kas gi iš-

eina? Ogi tas, kad jokio skaičiaus negalima dalyti iš nulio, nes išeitų gryna nesąmonė.

– Gerai, – tarė Robertas, – tada aš ir nebandysiu. Bet ką gi man daryti su tais 19? Nesvarbu, iš ko juos daliju – iš 2, iš 3, iš 4, 5, 6, 7 ar 8, – kaskart gaunu dar ir liekaną.

– Eikš arčiau, – pavadino Robertą senis, – pasakysiu tau kai ką svarbaus.

Robertas palinko prie senolio, kad net jo ūsas ausį sukuteno, ir išgirdo Skaičių kipšo paslaptį.

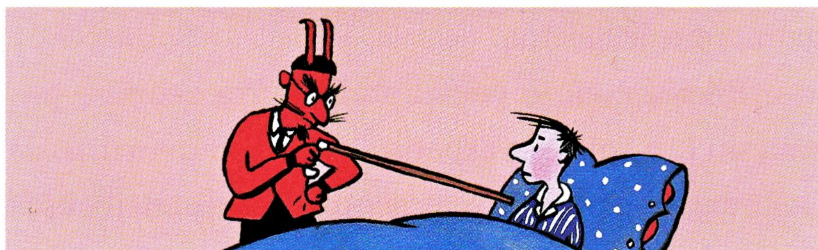
– Žinok, kad yra tokių paprastų skaičių, kurie iš ko nors dalijasi, ir yra kitokių, nesidalijančių. Pastarieji man mielesni. Ir žinai kodėl? Nes jie yra pirminiai, kaip ir pirmarūšiai. Jų jau per tūkstantį metų neįkanda matematikai. Nuostabūs skaičiai! Pavyzdžiui, vienuolika, trylika arba septyniolika.

Robertas stebėjosi, kad Skaičių kipšas ūmai taip nušvito, lyg būtų ko labai skanaus paragavęs.

– O dabar pasakyk man, mielas Robertai, kokie yra patys pirmieji pirminiai skaičiai?

– Nulis, – atsakė Robertas, kad paerzintų senį.

– Nulis uždraustas, – sušuko kipšas ir vėl sumojavo lazdele.



– Tada vienetas.

– Vienetas – ypatingas skaičius. Kiek kartų aš tau sakiau!

– Gerai jau, gerai, – tarė Robertas. – Neširsk. Tada dvejetas. Trejetas, manyčiau, irgi. Ketvertas – ne, jį mes jau išbandėm. Penketas tinka, jo nepadalysi. Na ir taip toliau.

– O *kaip* toliau?

Senolis jau vėl buvo ramus ir net rankas trynė. Tai neabejotinai reiškė, jog jis turi parengęs kažkokią ypatingą staigmeną.

– Tuo pirminiai skaičiai ir patrauklūs, – kalbėjo jis. – Nė vienas žmogus iš anksto nežino, kokie toliau bus pirminiai skaičiai; aš, savaime aišku, žinau, bet niekam neišduosiu.

– Net ir man?

– Niekam! Niekuomet! Dalykas tas, kad matydamas bet kokį skaičių nepasakysi, ar jis pirminis, ar ne. Nė vienas žmogus nežino to iš anksto. Tenka tikrinti.

– O kaip?

– Tuoj pamatysi.

Kipšas ėmė rašyti lazdele ant urvo sienos ir surašė visus skaičius nuo 2 iki 50. Išėjo tokia lentelė:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

– Na štai, mielasis, dabar tu imk mano lazdelę. Kai nustatysi, kad kuris nors skaičius ne pirminis, tik paliesk jį lazdele ir jis pradings.

– Bet čia nėra vieneto, – sutriko Robertas. – Ir nulio.

– Kiek kartų aš tau sakiau! Abu tie skaičiai ne tokie kaip visi. Jie nėra *nei* pirminiai, *nei* ne pirminiai. Argi nebeprisimeni, ką sapnavai pačioj pradžioj? Kad visi kiti skaičiai atsirado iš vieneto ir nulio?

– Tegul bus taip, kaip sakai. Tada pirmiausia išnaikinu lyginius skaičius, nes juos padalyti iš dviejų yra vienas juokas.

– Išskyrus 2, – priminė senolis. – Dvejetas yra pirminis, nepamiršk.

Robertas čiupo lazdelę ir ėmėsi darbo. Bematant sienoj liko tik šie skaičiai:

	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	

– O dabar imsiuosi trejeto. Trys yra pirminis skaičius. Visi kiti skaičiai iš trejeto skilties daugybos lentelėje – nebe pirminiai, nes juos galima padalyti iš trijų: tai 6, 9, 12 ir taip toliau.

Robertas ištrynė trejeto skilties skaičius, ir beliko

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23		25				29	
31				35		37			
41		43				47		49	

– Dabar ketverto skiltis. Ai ne, juk skaičiai, kurie dalijasi iš 4, mums nerūpi, jų jau nebėra, nes ketvertas nėra pirminis, jis lygus 2 × 2. O va penketas yra pirminis. Dešimtis, žinoma, ne, ji jau irgi dingo, nes 10 = 2 × 5.

– Ir visus kitus, kurie baigiasi penketuku, gali išbraukti, – priminė kipšas.

– Supratau:

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47		49	

Dabar jau Robertas įsismagino.

– Šešetą galim pamiršti, – varė jis, – nes tai 2 × 3. Bet septynetas yra pirminis.

– Pirminis! – pritarė Skaičių kipšas.

– Ir vienuolika.

– Tai kiek dabar liko?

Taip, mielas skaitytojau, tą nustatyk jau pats. Paimk storą flomasterį ir braukyk toliau, kol beliks pirminiai skaičiai. Pasakau iš anksto, kad jų bus nei daugiau, nei mažiau kaip penkiolika.

– Šauniai padirbėjai, Robertai.

Skaičių kipšas prisidegė pypkutę ir sukikeno.

– Kas čia juokinga? – nesuprato Robertas.

– Matai, ligi penkiasdešimties eina kaip iš pypkės, – tarė Skaičių kipšas. Jis patogiai susirangė ir pašaipiai šypsojosi.

– Bet ką tu darytum su tokiu skaičium kaip

10 000 019

arba

141 421 356 237 307

Ar jis pirminis, ar ne? Kad tu žinotum, kiek gerų matematikų nėrėsi iš kailio, ieškodami atsakymo į šį klausimą! Kietas riešutas, neįkandamas net ir didžiausiems skaičių kipšams.

– Bet juk tu tvirtinai, kad žinai, kaip toliau rikiuojasi pirminiai skaičiai, tik nenorėjai tos paslapties išduoti.

– Gal kiek ir pasigyriau.

– Gerai, kad bent kai kada tai pripažįsti, – pasidžiaugė Robertas. – Nes kartais tavęs klausantis atrodo, kad tu ne Skaičių kipšas, o Skaičių popiežius.

– Kuklesni išminčiai ieško atsakymo dirbdami milžiniškais kompiuteriais. Skaičiuoja mėnesių mėnesius, net dūmai rūksta. Žinok, tasai būdas, kurį tau rodžiau, – pašalinti pirmiausia dviejų kartotinius, paskui trijų, penkių ir taip toliau, – labai senas. Jis neblogas, bet didelius skaičius tektų šitaip kratyti be galo ilgai. Iki šių laikų mes jau prigalvojom įmantriausių metodų, bet su pirminiais skaičiais susidoroti nepadeda ir jie – čia vis dar trypčiojam vietoj. Toks jau velniškas jų būdas, bet juk tai, kas velniška, kaip tik ir yra patrauklu. Ar ne?

Šitaip šnekėjo Skaičių kipšas, smagiai mosikuodamas lazdele.

– Puiku, bet kokia nauda iš viso to smegenų džiovinimo? – dvejojo Robertas.

– Kvailas klausimas! Juk čia ir visas įdomumas, kad skaičių pasaulyje ne taip viskas paprasta kaip tavojo daktaro Oželio pamokose. Čia tau ne riestainius krimsti! Džiaukis, kad aš tau išvis tokias paslaptis išduodu. Pavyzdžiui, kad ir šią: paimk kokį tik nori skaičių, didesnį už vienetą, ir padaugink iš dviejų.

– 222, – tarė Robertas. – Ir 444.

– Tarp kiekvieno tokio skaičiaus ir dvigubai didesnio visada, tikrai VISADA, yra bent vienas pirminis skaičius.

– O gal ir ne?

– 307, – tarė senolis. – Ir taip pat būtų, net jei skaičiai baisiai dideli.

– Iš kur žinai?

– Ką tu, yra ir daug šaunesnių dalykų, – atsakė senis ir pasirąžė. Dabar jo nebesustabdysi!

– Paimk kokį nors lyginį skaičių, visai nesvarbu kokį, tik didesnį už du, ir aš tau įrodysiu, kad jis yra dviejų pirminių skaičių suma.

– 48, – pasiūlė Robertas.

– Trisdešimt vienas plius septyniolika, – čia pat išpyškino kipšas.

– 34, – sušuko Robertas.

– Dvidešimt devyni plius penki, – atsakė senolis, net neišsitraukęs pypkės iš dantų.

– Ir visada taip išeina? – stebėjosi Robertas. – Kodėl?

– Taigi, – tarė kipšas pakėlęs antakius ir stebėdamas dūmų žiedus, kylančius iš pypkės, – aš ir pats norėčiau žinoti kodėl. Beveik visi skaičių kipšai, kuriuos pažįstu, bandė išsiaiškinti. Sprendimą rasti pavyksta visada, bet niekas nežino, kodėl taip yra. Niekas negali to įrodyti.

Tai bent! – pagalvojo Robertas ir nusijuokė.

– Tikrai nuostabu, – pripažino jis.

Jam patiko, kad Skaičių kipšas tokius dalykus pasakoja. Paprastai senis, ko nors nežinodamas, sutrikęs raukydavosi, bet šį kartą tik užtraukė dūmą ir ėmė juoktis drauge su mokiniu.

– Ne toks tu kvailas, kaip atrodai, mielasis Robertai. Gaila, bet man jau metas. Šiąnakt turiu aplankyti dar porą matematikų. Smagu man tuos vaikinus paerzinti.

Sulig tais žodžiais Skaičių kipšas ėmė plonėti. Ne, jis nemažėjo, tik darėsi vis labiau permatomas,

ir netrukus urvas ištuštėjo. Tik dūmų debesėlis dar sklaidėsi ore. Skaičių keverzonė išskydo Robertui prieš akis, o urvas tapo minkštas ir šiltas kaip antklodė. Robertas pabandė prisiminti nuostabiąsias pirminių skaičių savybes, bet jo mintys vis labiau vėlėsi ir balo, kol virto kalnu baltos vatos.

Seniai jis bebuvo taip gerai miegojęs.

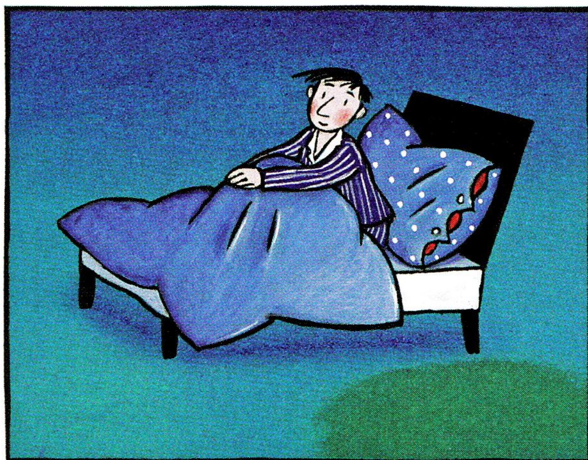
O tu? Jeigu dar neužsnūdai, parodysiu tau dar vieną triuką. Jam tinka ne tik lyginiai skaičiai, bet ir nelyginiai. Pasirink kokį nori. Svarbu tik, kad jis būtų didesnis už penkis. Pavyzdžiui, 55. Arba 27.

Juos irgi gali sudėti iš pirminių skaičių, tik jau ne iš dviejų, o iš trijų. Imkim kad ir 55:

$$55 = 5 + 19 + 31$$

O dabar išbandyk 27. Įsitikinsi, kad pavyksta VISADA, nors ir negaliu tau pasakyti kodėl.

Ketvirta naktis



– Ir kur tik tu manęs nenutempi! Tai į urvą be išėjimo, tai į mišką, kuriame vietoj medžių – tik vienetai, o grybai tokie dideli kaip foteliai, na o šiandien? Kur aš atsidūriau dabar?

– Prie jūros. Pats matai.

Robertas apsidairė.

Kiek akis užmato – tik baltas smėlis, o už apverstos valties, ant kurios sėdi Skaičių kipšas, krantą skalauja bangos. Nuošali vietelė, ką ir besakyti!

– Tu ir vėl užmiršai pasiimti skaičiuotuvą.

– Klausyk, – atsiliepė Robertas, – kiek jau kartų aš tau sakiau! Juk negaliu į sapną susitempti visų savo rakandų. Bene tu vakare žinai iš anksto, ką sapnuosi?

– Žinoma, ne, – patvirtino seneliokas. – Bet kai jau sapnuoji mane, galėtum taip pat sėkmingai susapnuoti ir savąjį skaičiuotuvą. Bet kur tau! Aš turiu viskuo tave aprūpinti. Vis aš ir aš! Ir paskui dar

man bambėsi, kad mašinėlė per minkšta, per žalia arba per lipni.

– Vis geriau negu nieko, – tarė Robertas.

Tik kilstelėjo lazdelę Skaičių kipšas, ir jau Robertui prieš akis stojosi naujas skaičiuotuvas. Ne toks varliškas kaip anąsyk, užtat didžiulis: minkštas, gauruotas baldas, ilgas kaip kokia lova ar sofa. Jo gale – pultelis su daugybe gauruotų klavišų, o ekranas, kuriame švyti skaitmenys, užima visą to keisto aparato atlošą.

– Nagi surink *vieną dalyti iš trijų,* – liepė senolis.

$$1 : 3$$

pakartojo Robertas ir paspaudė klavišus. Be galo ilgame lange sušvito šviesiai žalias atsakymas:

0,3333333333333333333

– Ar tie trejetai niekuomet ir nesiliaus? – paklausė Robertas.

– Kodėl gi, – atšovė Skaičių kipšas, – jie liausis, kai tik liausis skaičiuotuvas.

– O paskui?

– Paskui jie tęsis toliau. Tik tu nebematysi.

– Bet juk čia vis tas pats, vienas trejetas po kito. Ir galo nematyti.

– Tavo teisybė.

– Neee, – nutęsė Robertas. – Man tai per kvaila! Jau verčiau parašysiu vieną trečiąją. Štai taip:

$$\frac{1}{3}$$

Ir šventa.

– Gal ir taip, – atsakė senis. – Bet tada turėsi skaičiuoti trupmenomis, o trupmenų skaičiavimo, man rodos, tu negali pakęsti. *Jeigu ⅓ 33-ijų kepėjų per 2½ valandos iškepa 89 riestainius, tai kiek riestainių 5¾ kepėjo iškeps per 1½ valandos?*

– Dėl Dievo meilės, ne! Man tai per daug primena daktarą Ožėlį. Jau geriau skaičiuotuvas ir dešimtainės trupmenos, nors ir begalinės. Man tik įdomu, iš kur tie trejetai atsiranda.

– Ogi štai iš kur. Pirmas trejetas po kablelio – tai trys dešimtosios. Toliau eina antras trejetas, būtent trys šimtosios, trečias – trys tūkstantosios ir taip toliau. Pabandyk dabar sudėti į krūvą.

0,3
0,03
0,003
0,0003
0,00003
...

Supratai? Taip? Tada pamėgink visa tai padauginti iš trijų: pirmąjį trejetą, atseit tris dešimtąsias, paskui tris šimtąsias ir taip toliau.

– Tai visai lengva, – atsiliepė Robertas. – Galiu net ir mintinai:

$$0{,}3 \times 3 = 0{,}9$$
$$0{,}03 \times 3 = 0{,}09$$
$$0{,}003 \times 3 = 0{,}009$$
$$0{,}0003 \times 3 = 0{,}0009$$

Na ir taip toliau.

– Puiku. O jei dabar visus tuos devynetus vėl sudėsi, ką gausi?

– Minutėlę! 0,9 plius 0,09 bus 0,99, ir dar plius 0,009 bus jau 0,999. Vis daugiau devynetų. Atrodo, ir jie rengiasi tęstis be galo.

– Taip ir yra. Tačiau gerai pagalvok: čia kažkas ne taip! Juk jei sudėsi tris trečiąsias, turėtum gauti 1, ar ne? Nes trys trečdaliai kokio nors dalyko – tai jau visas tas dalykas. Čia kitaip ir būti negali. Tai ką?

– Neįsivaizduoju, – tarė Robertas. – Kažko trūksta. Nors 0,999 yra *beveik* lygu vienetui, vis dėlto ne visai.

– Taigi. Todėl turėtum rašyti devynetus vieną po kito ir niekada negalėtum sustoti.

– Nieko sau! Bepigu tau juoktis!

– Žinoma, Skaičių kipšui tai visai paprasta!

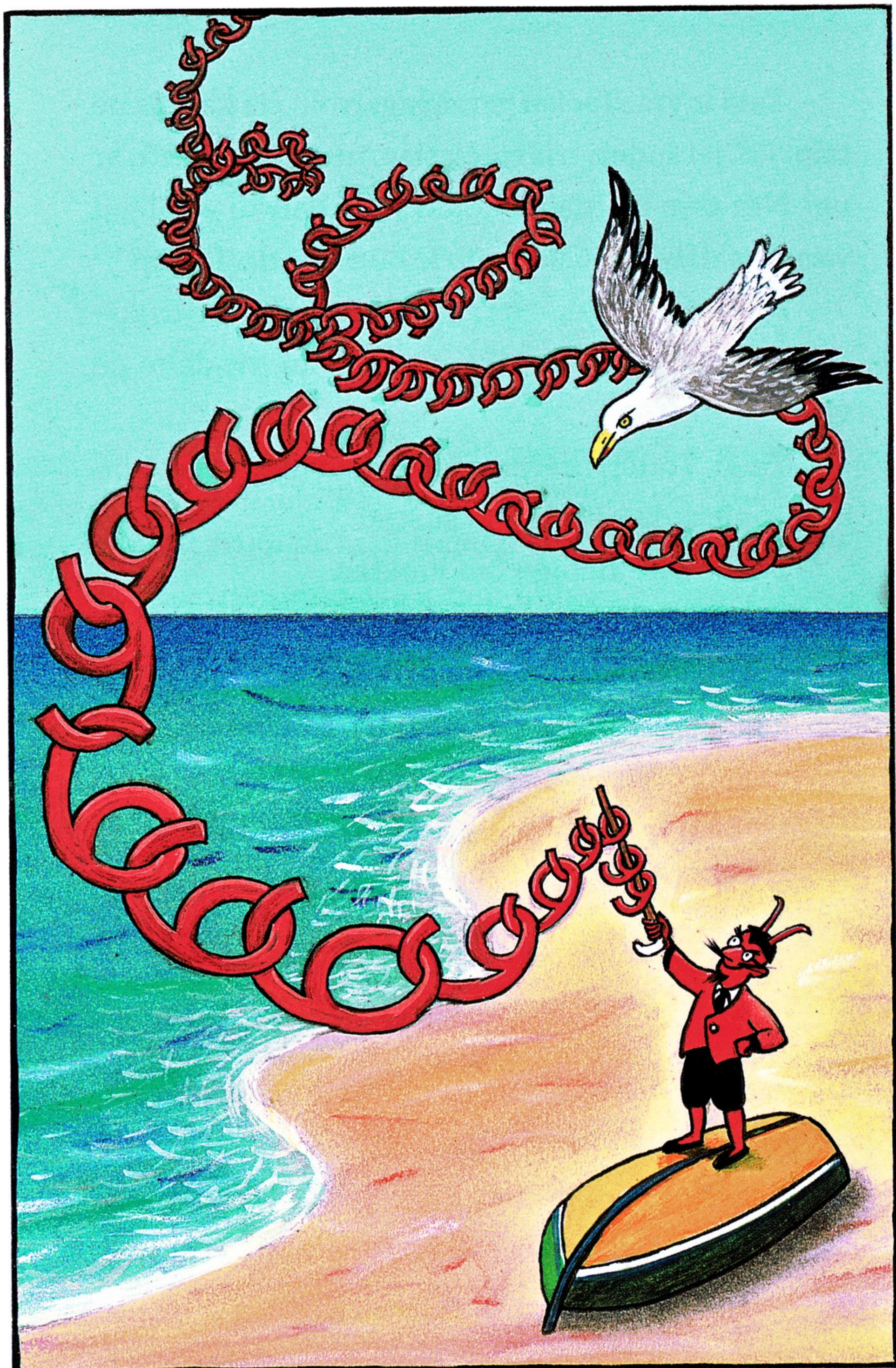
Senis pašaipiai nusikvatojo, pakėlė lazdelę, pamakalavo, ir kaipmat visą dangų užtemdė ilgiausia virtinė devynetų; ji vis ilgėjo ir dar kilo aukštyn.

– Gana, – šaukė Robertas. – Man jau bloga!

– O man tai kas, tik pirštu mostelsiu ir nebeliks nieko. Bet tik tada, jei tu pripažinsi, kad ta devynetų vora po nulio, be paliovos ilgėjanti, visiškai lygi vienetui.

Taip jam kalbant, skaitmenų virtinė vis augo, o dangus vis temo. Nors Robertui jau visai galva apsvaigo, jis niekaip nenorėjo pasiduoti.

– Jokiu būdu, – nesutiko jis. – Kad ir kokią ilgą žarną išvyniotum, vis tiek kai ko trūks. Paskutinio devyneto.



Skaičių kipšas pakėlė lazdelę, pamakalavo, ir kaipmat visą dangų užtemdė ilgiausia virtinė devynetų.

– Paskutinio devyneto nėra, – suklykė Skaičių kipšas. Bet dabar Robertas nebesusigūžė pamatęs, kad senoliui užėjo nedidukas įsiūčio priepuolis. Jis jau spėjo įsitikinti, jog kiekvienąsyk, kai taip atsitinka, gali laukti ko nors įdomaus, kokio klausimo, į kurį ne taip lengva atsakyti.

Tačiau skaitmenų virtinė plaikstėsi taip grėsmingai arti Roberto nosies, o Skaičių kipšą buvo apsivijusi taip standžiai, kad vos galėjai jį įžiūrėti.

– Gerai jau, – tarė Robertas, – pasiduodu. Bet tik tada, jeigu išvaduosi mus nuo tos gyvatės.

– Va taip jau geriau.

Senolis vargais negalais pakėlė lazdelę, jau storiausiai aplipusią devynetais, sumurmėjo sau po nosim kažką nesuprantamo – ir skaitmenų virtinės kaip nebūta.

– Uff, – atsiduso Robertas. – Ar tik trejetai ir devynetai rikiuojasi į tokias šlykščias virtines, ar ir kiti skaičiai?

– Begalinių virtinių yra tiek, kiek pajūry smiltelių, mielasis. Tik pagalvok, kaip daug jų gali rasti vien tarp 0,0 ir 1,0!

Robertas susimąstė, o paskui atsakė:

– Be galo daug. Baisiai daug. Lygiai tiek pat, kiek tarp vieneto ir begalybės.

– Neblogai. Net labai gerai, – pagyrė jį Skaičių kipšas. – Bet ar gali įrodyti?

– Žinoma, galiu.

– Nagi, man labai įdomu.

– Iš pradžių parašau nulį ir kablelį, – dėstė Robertas. – Po kablelio rašau vienetą: 0,1. Paskui dvejetą. Ir taip toliau. Šitaip galėčiau surašyti po kablelio visus skaičius, kokie tik yra, ir vis dar nebūčiau priėjęs iki 0,2.

– Visus sveikuosius skaičius.

– Žinoma. Visus sveikuosius skaičius. O prieš kiekvieną skaičių tarp nulio ir nebežinia kiek yra dar toks pat skaičius su nuliu ir kableliu priekyje, ir visi jie mažesni už vienetą.

– Nuostabu, Robertai. Didžiuojuosi tavim.

Skaičių kipšas buvo tikrai labai patenkintas. Tačiau vis negalėjo liautis, todėl sumanė dar vieną dalyką.

– Bet žinok, kad kai kurie iš tų tavo skaičių po kablelio labai jau keistai elgiasi. Parodysiu kaip. Ar nori?

– Mielai! Jeigu tik neprimarminsi pilno paplūdimio tų šlykščių gyvačių.

– Nesirūpink. Užteks ir tavo didžiojo skaičiuoklio. Tik surink klavišais: septynis padalyti iš vienuolikos.

Robertui neprireikė dukart sakyti.

7:11=0,636363636363636...

– Kas čia dabar, – šūktelėjo jis. – Vis 63, paskui dar 63 ir vėl 63. Tikriausiai taip eitų ir eitų.

– Žinoma, bet tai dar menkniekis. Dabar pabandyk padalyti šešis iš septynių!

Robertas suspaudė:

6 : 7=0,857 142857 142857...

– Kartojasi vis tie patys skaitmenys, – pastebėjo jis. – 857 142 ir vėl tas pats iš naujo. Skaičiai sukasi ratu!

– Taip, iš tiesų fantastiški padarai tie skaičiai. Teisybę sakant, paprastų skaičių apskritai nėra. Kiekvienas turi savų užgaidų, savų paslapčių. Niekada jų iki galo neperprasi. Kad ir ta devynetų virtinė po nulio ir kablelio, tokia nepabaigiama ir vis dėlto tiksliai lygi paprasčiausiam vienetui. O kiek dar kitų, kur kas įnoringesnių, – ko tik jie neišdarinėja po kablelio! Tai neprotingieji skaičiai. Aš juos taip vadinu, nes jie nesilaiko žaidimo taisyklių. Jeigu dar nori ir per daug neskubi, parodysiu, kokius juokus jie krečia.

Kai Skaičių kipšas toks įtartinai mandagus, kaskart lauk iš jo kokios šiurpulingos naujienos. Tą Robertas jau buvo patyręs. Bet smalsumas nugalėjo.

– Nagi klok, – tarė jis.

– Gal dar prisimeni skaičių šuolius? Kaip mes ten šokdinom dešimtį ir dvejetą? Dešimt dauginti iš dešimties ir dar kartą iš dešimties bus tūkstantis, o trumpiau taip:

$$10^3 = 1000$$

Tas pat ir su dvejetu.

– Žinau. Pašokdinęs dvejetą gaunu

$$2, 4, 8, 16, 32$$

ir taip toliau, kaip visuose tavo žaidimuose, iki begalybės.

– Taigi, – tarė seneliukas. – Kiek bus du ketvirtu šuoliu?

– Šešiolika, – sušuko Robertas. – Juk jau sakiau!

– Puikiausiai. O dabar darysim tą patį, tik atvirkščiai. Šokinėsim, taip sakant, atbulai. Aš sakysiu 16, o tu šoksi vieną šuolį atgal.

– Aštuoni!

– O jei aš sakysiu: aštuoni?

– Keturi, – išpyškino Robertas. – Tai juk akivaizdu.

– Tada tik įsidėmėk, kaip tas veiksmas vadinasi. Sakoma ne *šokinėti atbulai,* o *rauti šaknį.* Tarsi ropę iš žemės.

Taigi šaknis iš šimto lygi dešimčiai, o šaknis iš dešimties tūkstančių – šimtui. O kam lygi šaknis iš dvidešimt penkių?

– Dvidešimt penki – tai penkiskart penki. Vadinasi, penki yra šaknis iš dvidešimt penkių.

– Jeigu ir toliau darysi tokią pažangą, Robertai, tapsi geriausiu mano mokiniu. Šaknis iš keturių?

– Šaknis iš keturių lygi dviem.

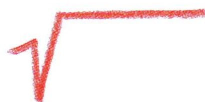
– Šaknis iš 5929?

– Ar pakvaišai! – šaukė Robertas: dabar jau jis neteko kantrybės. – Kaipgi aš apskaičiuosiu? Juk tu pats esi sakęs, kad skaičiuoti – kvailių darbas. Gana, kad mus jau mokykloj kankina tuo skaičiavimu, o tu dar ir sapne nesiliauni.

– Ramiau, ramiau, – maldė jį Skaičių kipšas. – Juk tokiems mažmožiams tvarkyti turime skaitytuvą.

– Nieko sau skaitytuvas, – pasišaipė Robertas. – Sulig sofa didumo.

– Šiaip ar taip, jame yra toks klavišas:



Ir tuoj pamatysi, ką jis reiškia.

– Šaknį, – išpylė Robertas.

– Teisybė. Na tai pabandyk:

$$\sqrt{5929} =$$

Robertas pabandė, ir tučtuojau sofos atkaltėj nušvito atsakymas:

77

– Nuostabu. Bet pamatysi, kas bus dabar! Paspausk $\sqrt{2}$, tik neišsigąsk!

Robertas paspaudė ir ėmė skaityti:

1,4 142 1356237309504880 1688724…

– Siaubas, – sušuko jis. – Kažkokia beprasmybė. Skaitmenų kratinys, ir tiek. Nematau jokios tvarkos.

– Ir niekas nematys, mielasis Robertai. Čia ir yra esmė. Mat šaknis iš dviejų yra neprotingasis skaičius.

– O kaip man sužinoti, kas ten toliau, po paskutinių trijų skaitmenų? Juk neabejoju, kad tai dar ne galas.

– Žinoma. Bet čia jau ir aš negaliu tau padėti. Tolesnius skaitmenis išgautum tik baisiai ilgai skaičiuodamas, kol sustreikuotų tavo skaičiuotuvas.

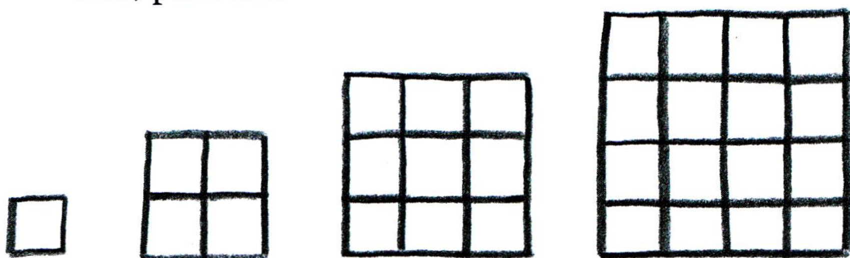
– Išprotėt galima. Nei šis, nei tas. O juk ta pabaisa atrodo visai nekaltai, jei užrašysi ją kitaip:

$$\sqrt{2}$$

– Irgi teisybė. Mano lazdele gali kuo puikiausiai parašyti $\sqrt{2}$ smėlyje.

Skaičių kipšas lazdos galu pabraižė smėlyje keletą figūrų.

– Štai, pažvelk:



O dabar suskaičiuok mažuosius langelius. Ar pastebi ką nors?

– Žinoma. Čia vien pašokdinti skaičiai.

$$1 \times 1 = 1^2 = 1$$
$$2 \times 2 = 2^2 = 4$$
$$3 \times 3 = 3^2 = 9$$
$$4 \times 4 = 4^2 = 16$$

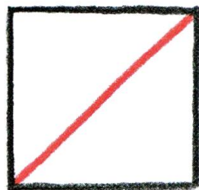
– Taip, – pritarė Skaičių kipšas, – ir tuoj pamatysi, kaip tuo pasinaudoti. Pakanka suskaičiuoti, kiek langelių yra viename kvadrato šone, ir žinai, koks skaičius čia pašokdintas. Ir atvirkščiai. Jei žinai, kiek langelių visame kvadrate, na kad ir 36, ir iš to skaičiaus ištrauksi šaknį, tai vėl pamatysi, kiek langelių yra viename šone:

$$\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4$$

– Gerai, – pasakė Robertas, – bet ką tai turi bendra su neprotingaisiais skaičiais?

– Matai... Kvadratus, žinok, ne taip lengva perprasti. Niekuomet nepasitikėk kvadratu! Gal jis ir atrodo nekaltai, bet iš tiesų yra labai klastingas. Štai tau pavyzdys.

Senolis nubrėžė smėlyje paprasčiausią tuščią kvadratą, paskui išsitraukė iš kišenės raudoną liniuotę ir padėjo ją įstrižai. Štai taip:



– Jei dabar kiekviena kraštinė lygi vienam...

– Kam vienam? Vienam centimetrui, vienam metrui ar kam?

– Visai nesvarbu, – nekantriai atšovė Skaičių kipšas. – Gali pasirinkti pats. Tegul tai bus vienas kvingas ar vienas kvangas – tavo reikalas. O dabar aš klausiu: ta raudonoji liniuotė kvadrato viduje – koks jos ilgis?

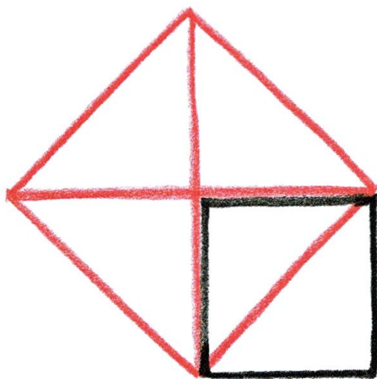
– Iš kur aš galiu žinoti?

– Ogi šaknis iš dviejų, – velniškai džiūgaudamas išsišiepė senis.

– Kodėl? – darsyk apstulbo Robertas.

– Tik nesijaudink, – ramino jį Skaičių kipšas. – Tuoj sužinosi! Reikia tik uždėti dar vieną kvadratą, va taip, įstrižai.

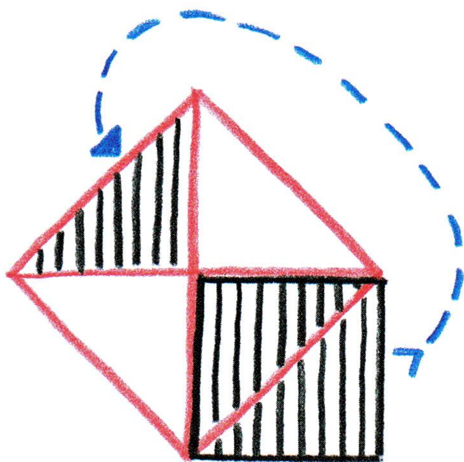
Jis išsitraukė dar penkias raudonas liniuotes ir išdėliojo jas smėlyje. Išėjo štai tokia figūra:



– O dabar atspėk, kokio didumo yra tas įstrižas raudonasis kvadratas!

– Neturiu žalio supratimo.

– Lygiai dusyk didesnis už juodąjį. Nori žinoti kodėl? Paimk juodojo kvadrato apatinę pusę ir perkelk į raudonąjį kvadratą, į vieną iš keturių jo kampų:



Juk ir mes maži taip žaisdavom, prisiminė Robertas. Imam, būdavo, popieriaus lapą, iš vienos pusės nuspalvintą juodai bei raudonai, ir sulankstom. Tai vadinasi „Dangus ir pragaras". Kas pataiko atlenkti raudoną kampą, keliauja į pragarą.

– Tai ką, pripažįsti, kad raudonasis kvadratas dvigubai didesnis už juodąjį?

– Pripažįstu, – atsakė Robertas.

– Gerai. Jei juodojo plotas lygus vienam kvangui, kaip kad mes susitarėm (ir galim užrašyti taip: 1^2), tai koks bus raudonojo plotas?

– Dusyk didesnis, – atsakė Robertas.

– Vadinasi – du kvangai, – tarė Skaičių kipšas. – O kokio ilgio tada bus kiekviena raudonojo kvadrato kraštinė? Turėsi šoktelėti atbulai! Ištraukti šaknį!

– Tikrai, tikrai! – sušuko Robertas. Jam tarsi akys atsivėrė.

– Šaknis, – suprato jis. – Šaknis iš dviejų!

– Štai ir vėl susidūrėm su tuo mūsų paiku neprotinguoju skaičium: 1,414 213...

– Gana, toliau nebesakyk, – paskubėjo sustabdyti senį Robertas, – nes, ko gero, dar ir aš išprotėsiu.

– Ne taip jau baisu, – nuramino jį senolis. – Nebūtina skaičiuoti, gali paprasčiausiai nubrėžti tą šaknį smėlyje. Tik nemanyk, kad tie neprotingieji skaičiai – kokia retenybė. Priešingai. Jų yra tiek, kiek pajūryje smiltelių. Tarp mūsų šnekant, jie netgi dažnesni už kitus.

– O aš maniau, kad ir tų paprastųjų yra be galo daug. Juk tu pats esi taip sakęs. Ir nuolat tai pabrėži!

– Taip ir yra. Garbės žodis! Bet, kaip jau minėjau, neprotingųjų dar daugiau, kur kas daugiau.

– Daugiau negu kiek? Daugiau nei be galo daug?

– Taigi.

– Tu čia jau nuklydai į lankas, – ryžtingai paprieštaravo Robertas. – Manęs neapmulkinsi. Daugiau nei be galo daug būti negali. Tai gryniausia nesąmonė.

– Ar nori, kad tau įrodyčiau? – paklausė Skaičių kipšas. – Kad pakločiau prieš akis? Parodyčiau visus neprotingus skaičius iš karto?

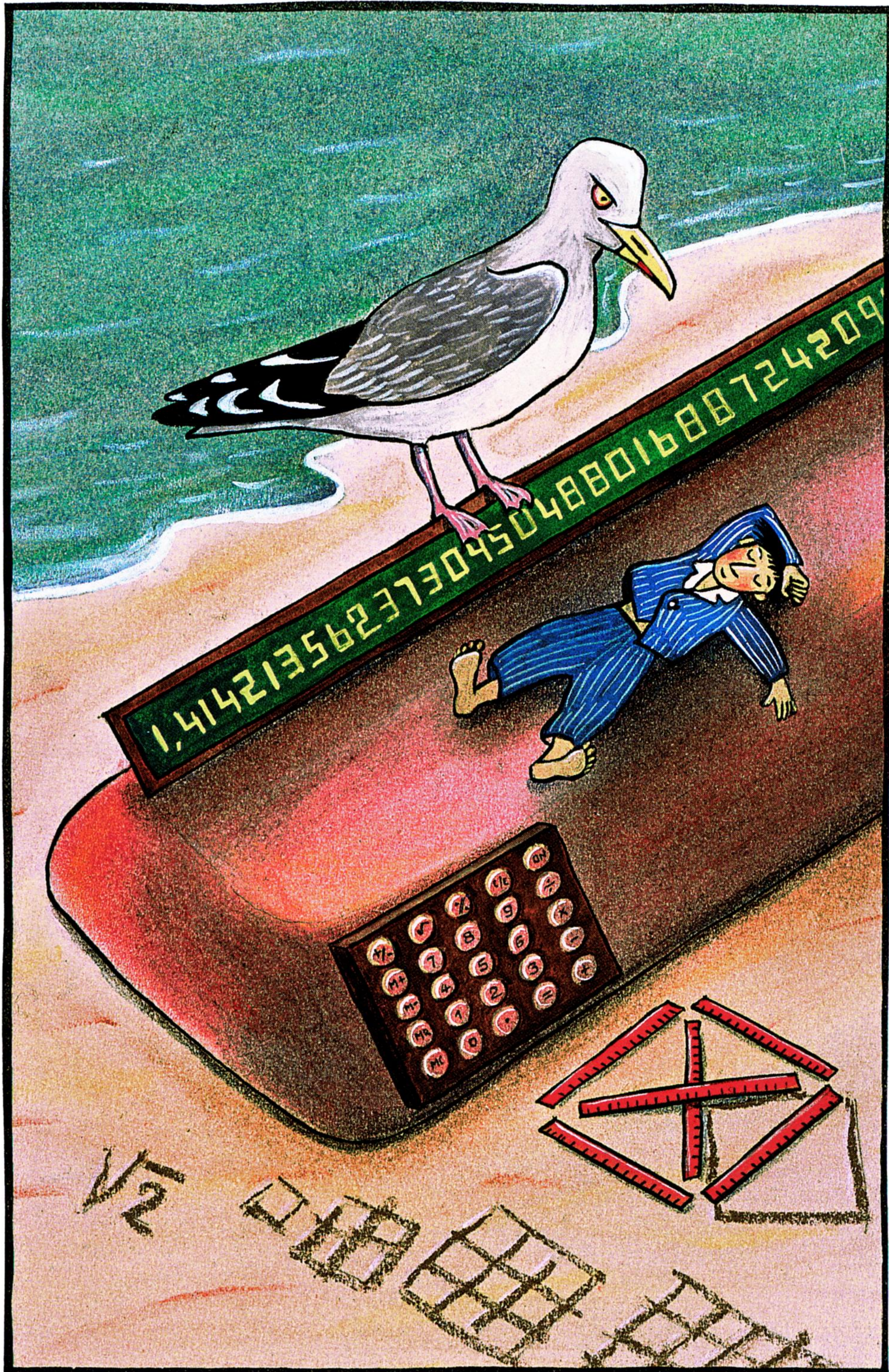
– Oi ne! Man jau ir devynetų virtinės užteko. Be to, parodyti ir įrodyti – visai ne tas pat.

– Kad tave paraliai! Tikrai! Čia jau nušluostei man nosį.

Tačiau Skaičių kipšas neįsiuto, tik suraukė kaktą ir įtemptai mąstė.

– Vis tiek, – tarė jis pagaliau, – gal man dar šaus į galvą ir įrodymas. Galėčiau pamėginti. Bet tik jei tu reikalautum.

– Ne, ačiū, šiandien man pakaks. Šuniškai pavargau. Turiu bent sykį padoriai išsimiegoti, kad rytoj mokykloj neturėčiau bėdų. Gal padrybsosiu



– Šiandien man pakaks, – tarė Robertas. – Šuniškai pavargau. – Ir išsitiesė ant minkšto, gauruoto skaičiuotuvo, didumo sulig gera sofa.

kokią valandėlę, jeigu tau netrukdys. Šis baldas atrodo visai patogus.

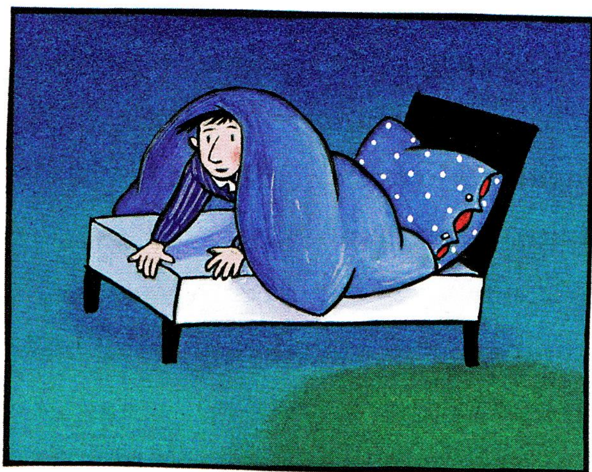
Ir vaikinas išsitiesė ant minkšto, gauruoto skaičiuotuvo, didumo sulig gera sofa.

– Dėl manęs, – atsiliepė senolis. – Tu juk ir dabar miegi. Miegančiam mokslas visada geriau lenda į galvą.

Šį kartą Skaičių kipšas išsliūkino pirštų galais, kad nepažadintų Roberto. Ne toks jau jis ir blogas, dar spėjo pagalvoti Robertas. Gal net ir visai mielas.

Ir vaikinas netrukdomas ir nieko nebesapnuodamas išmiegojo iki gerų priešpiečių. Mat visai buvo pamiršęs, kad šeštadienis, o juk šeštadieniais pamokų nebūna.

Penkta naktis



Netikėtai viskas baigėsi. Veltui Robertas laukė svečio iš skaičių pasaulio. Vakarais jis guldavosi miego kaip visuomet, dažniausiai ir sapnuodavo, bet ne sofos didumo kišeninius skaičiuotuvus ir šokinėjančius skaičius, o gilias juodas duobes, į kurias įpuldavo, arba kamarą, prigrūstą senų lagaminų, iš kurių lenda skruzdėlės, didelės kaip katinai. Durys užrakintos, niekur neišeisi, ir skruzdėlės ropoja Roberto kojomis vis aukštyn. Kitą kartą jam reikėjo pereiti kunkuliuojančią upę, bet tilto niekur nematyti, ir tenka šokinėti nuo akmens ant akmens. Jau, rodos, kitas krantas visai čia pat, bet Robertas pasijunta bestovįs ant akmens, aplink vanduo, ir negali žengti nei pirmyn, nei atgal. Vien tik slogučiai, o Skaičių kipšo nei regėti, nei girdėti.

Šiaip aš visada galiu galvoti apie ką noriu, krimtosi Robertas, tik sapne nepasirinksi. Kodėl taip yra?

– Žinai ką, – tarė jis mamai vieną vakarą, – aš nusprendžiau. Nuo šios dienos apskritai nieko nebesapnuosiu.

– Tai gerai, vaikeli, – atsakė ji. – Juk kaskart, kai tu prastai miegi, rytojaus dieną mokykloj negali susikaupti ir parsineši blogų pažymių.

Žinoma, ne dėl to jis kratėsi sapnų. Bet tik palinkėjo mamai labos nakties – vis viena negalės išaiškinti jai visko.

Tačiau vos tik užmigo, vėl prasidėjo kankynė. Neva jis žingsniuoja per plačią dykumą, kurioj nėra nei pavėsio, nei vandens. O jis vien su trumpikėmis, vis eina ir eina, troškulys kankina, prakaitas muša, kojos visos pūslėtos – ir štai pagaliau tolumoj išvysta porą medžių.

Tikriausiai miražas, pamano jis, arba oazė.

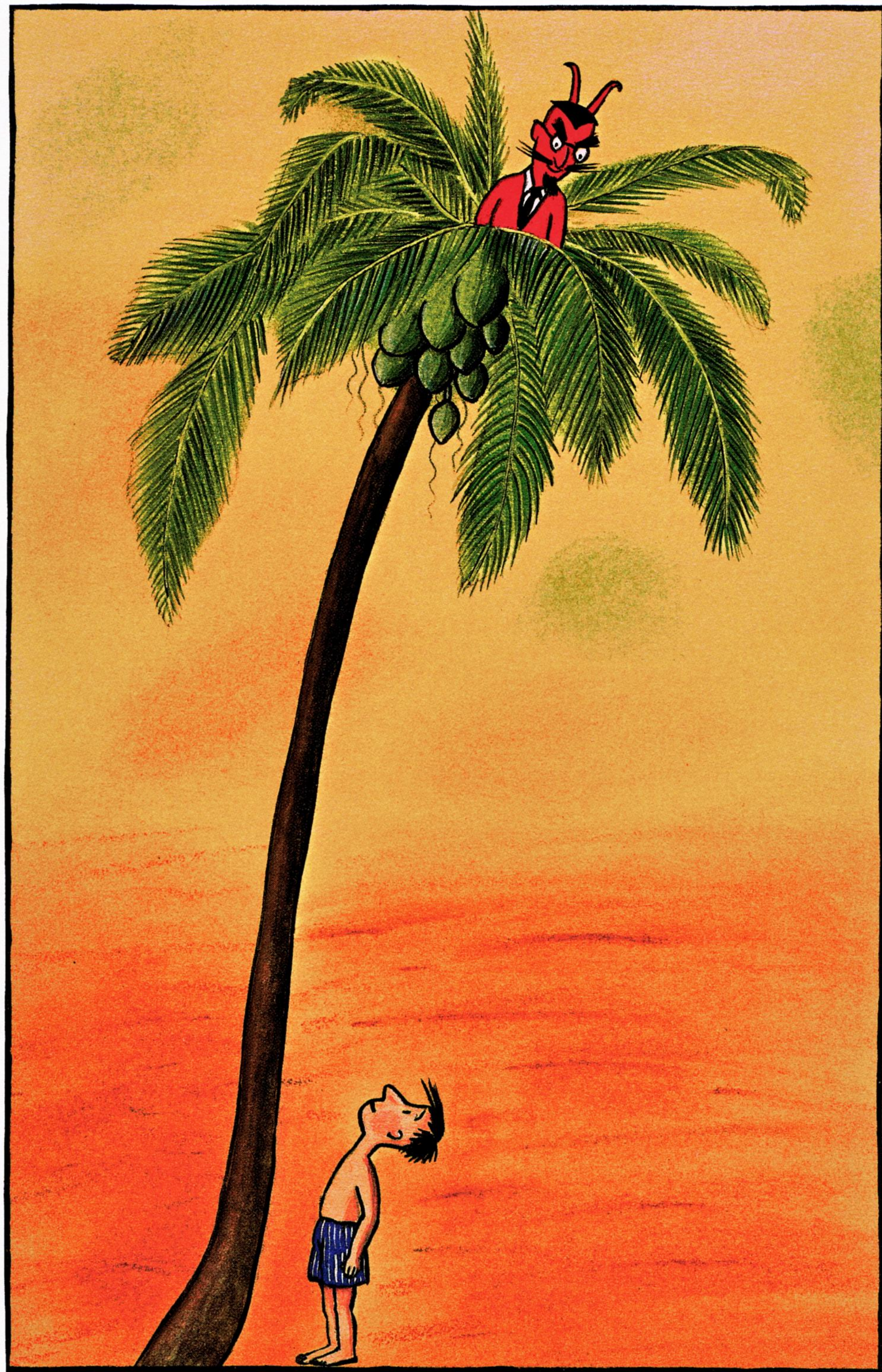
Jis klampoja toliau, kol prieina pirmą palmę. Ir išgirsta balsą, tarytum pažįstamą:

– Sveikas, Robertai!

Vaikinas pažvelgė aukštyn. Taip ir yra! Palmės viršūnėje tupi Skaičių kipšas ir vėduojasi lapais.

– Aš baisiai noriu gerti, – sušuko Robertas.

– Eikš pas mane, – liepė senolis.



Jis klampojo toliau, kol priėjo pirmą palmę. Ir išgirdo balsą, tarytum pažįstamą: „Sveikas, Robertai!“ Palmės viršūnėje tupėjo Skaičių kipšas ir vėdavosi lapais.

Vargais negalais Robertas užkopė pas seną draugą. Šis laikė rankoje kokoso riešutą, išsitraukė peiliuką ir prakrapštė kevale skylę.

Kokoso pienas buvo nuostabiai skanus.

– Seniai nesimatėm, – tarė Robertas. – Kur buvai pradingęs?

– Juk matai, atostogauju.

– O ką veiksim šiandien?

– Man rodos, tu pavargai traukdamas per dykumą.

– Ne taip labai, – atsakė Robertas. – Man jau geriau. O ką? Ar tau nieko nebešauna į galvą?

– Man visuomet kas nors šauna į galvą, – atkirto senolis.

– Bet visada tik skaičiai ir skaičiai.

– O kas gi dar? Nėra nieko patrauklesnio už skaičius. Še, imk!

Kipšas įbruko Robertui tuščią riešuto kevalą.

– Mesk žemėn!

– Kur?

– Žemyn, ir tiek.

Robertas sviedė riešutą į smėlį. Iš aukštai jis atrodė kaip taškelis.

– Dar vieną. Ir dar vieną. Ir dar, – liepė Skaičių kipšas.

– Ir kas bus?

– Pamatysi.

Robertas nuskynė tris dar žalius kokosus ir numetė žemėn. Štai ką jis pamatė smėlyje:

– Dar! – šaukė senis.

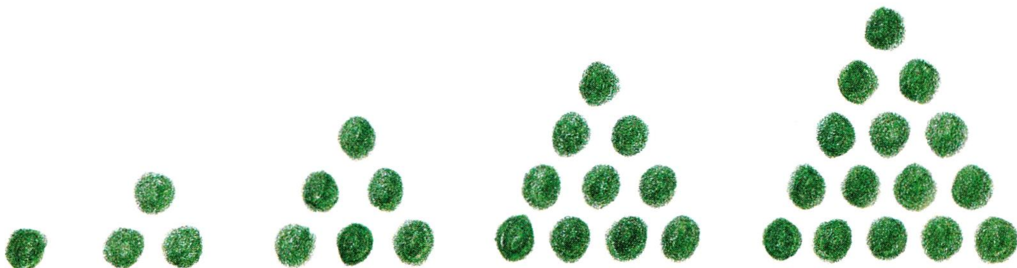
Robertas vis svaidė ir svaidė.

– Ką dabar matai?

– Vien tik trikampius, – atsiliepė Robertas.

– Gal tau padėti? – paklausė Skaičių kipšas.

Taip jie raškė ir mėtė, vėl skynė ir vėl mėtė, kol apačioj išsirikiavo visa kirbinė trikampių:



– Keista, kad visi riešutai sugulė taip tvarkingai, – stebėjosi Robertas. – Aš juk visiškai nesitaikiau, o kad ir būčiau norėjęs, man nebūtų pavykę.

– Taigi, – tarė senolis ir šyptelėjo, – taip taikliai mėtyti įmanoma tik sapne – na ir matematikoj. Paprastam gyvenime nepavyksta niekas, o matematikoj pavyksta viskas. Beje, nebūtinai su kokosais. Taip pat sėkmingai būtume galėję svaidyti teniso kamuoliukus, sagas arba triufelius. O dabar suskaičiuok, kiek riešutų yra tuose trikampiuose ten žemai.

– Pirmas trikampis – iš viso ne trikampis. Tai taškas.

– Arba trikampis, – patikslino Skaičių kipšas, – kuris tiek susitraukė, tapo toks mažytis, kad matom jau tik tašką. Taigi?

– Taigi ir vėl vienetas, – atsakė Robertas. – Antrą trikampį sudaro trys riešutai, trečią – šeši, ketvirtą – dešimt, o penktą – net nežinau, reikėtų suskaičiuoti.

– Nėra reikalo. Gali ir pats sugalvoti.

– Negaliu, – gynėsi Robertas.

– Gali gali, – tvirtino Skaičių kipšas. – Štai, pirmąjį trikampį, iš tiesų net ne trikampį, sudaro vie-

nas riešutas. Antrajame dviem riešutais daugiau, tais abiem apatiniais, taigi:

$$1 + 2 = 3$$

Trečiajame dar trys viršaus – apatinė eilė, taigi:

$$3 + 3 = 6$$

Ketvirtajame – dar viena eilė, o ją sudaro keturi riešutai, vadinasi:

$$6 + 4 = 10$$

Tai kiek riešutų bus penktajame?

Robertas jau susigaudė. Ir sušuko:

$$10 + 5 = 15$$

– Galim daugiau riešutų ir nebemėtyti, – šnekėjo jis. – Aš jau ir pats žinau, kaip toliau eitų. Šeštame trikampyje būtų dvidešimt vienas riešutas: pirmiau penkiolika, kaip ir penktajame, o apačioj dar šeši nauji, tad iš viso dvidešimt vienas.

– Gerai, – pagyrė vaikiną Skaičių kipšas. – Tada lipkim žemyn ir įsitaisykim patogiai.

Leistis į apačią pasirodė stebėtinai lengva, o atsidūręs ant žemės Robertas nepatikėjo savo akimis:

stovi du šezlongai baltais ir mėlynais dryžiais, čiurlena fontanas, o ant stalelio šalia didelio plaukimo baseino pastatytos dvi stiklinės atšaldytų apelsinų sulčių. Nieko stebėtino, pagalvojo Robertas, kad senis pasirinko šią oazę. Čia galima puikiai paatostogauti.

Abu gardžiai atsigėrė, tada senolis prabilo:

– Pamirškim dabar tuos kokosus. Kalbėsim apie skaičius. Ir ne apie bet kokius, o apie ypatingos rūšies, vadinamuosius trikampiùs skaičius. Jų yra daugiau, nei tu manai.

– Taip ir žinojau, – tarė Robertas. – Ko tik tu imiesi, visko besą baisiai daug.

– Neišsigąsk, – nuramino jį Skaičių kipšas, – kol kas imsimės tik pirmojo dešimtuko. Luktelėk, tuoj aš tau juos surašysiu.

Jis pakilo nuo šezlongo, pasiėmė lazdelę, persisvėrė per baseino kraštą ir ėmė rašyti ant vandens:

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 . . .

Iš tiesų tam seniui viskas tinka, tarė sau Robertas. Ar danguje, ar smėlyje, visur jis gali prirašinėti skaičių be galo be krašto. Net ir vanduo jo lazdelei paklūsta.

– Neįsivaizduoji, kiek visko galima padaryti su tais trikampiais skaičiais, – pakuždėjo Skaičių kipšas Robertui į ausį. – Štai tik vienas pavyzdys: įsigilink į skirtumą!

– Į kokį skirtumą? – paklausė Robertas.

– Dviejų gretimų trikampių skaičių.

Robertas įsižiūrėjo į skaičius, mirguliuojančius vandens paviršiuje, ir ėmė svarstyti.

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 . . .

– Trys minus vienas bus du. Šeši minus trys bus trys. Dešimt minus šeši bus keturi. Visi skaičiai iš eilės. Tai bent! Ir tikriausiai taip tęstųsi ir toliau.

– Gali neabejoti, – pritarė Skaičių kipšas ir patenkintas atsilošė. – Bet nemanyk, tai dar ne viskas! Pasakyk man kokį tik nori skaičių, ir aš tau įro-

dysiu, kad galiu jį sudėti vien iš trikampių skaičių, daugių daugiausia – iš trijų.

– Gerai, – pasakė Robertas. – 51.

– Tai lengva, čia man užteks ir dviejų:

$$51 = 15 + 36$$

– 83!

– Prašom:

$$83 = 10 + 28 + 45$$

– 12!

– Juokų darbas:

$$12 = 1 + 1 + 10$$

– Matai, man pavyksta *visuomet.* O dabar pamatysi dar kai ką visai netikėta. Sudėk paporiui gretimus trikampius skaičius, tik neišgriūk iš nuostabos.

Robertas atidžiau įsižiūrėjo į plūduriuojančius skaičius:

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 . . .

Ir pabandė sudėti, vis po du gretimus:

$$1+3=4$$
$$3+6=9$$
$$6+10=16$$
$$10+15=25$$

– Bet juk visi jie yra pašokdintieji skaičiai: 2^2, 3^2, 4^2, 5^2!

– Neblogai, ką? – tarė senolis. – Gali tęsti taip ir toliau, kiek tik nori.

– Kam to reikia, – suabejojo Robertas. – Geriau būtų išsimaudyti.

– Bet prieš tai, jei tik nori, parodysiu tau dar vieną fokusą.

– Kad man jau ir dabar gana, – numykė Robertas.

– Tavo valia. Ne – tai ne. Tada ir aš einu sau, – pareiškė Skaičių kipšas.

Ir vėl jis įsižeidė, pamanė Robertas. Jeigu jį dabar išleisiu, tikriausiai vėl susapnuosiu kokias nors raudonas skruzdėles. Todėl vaikinas tarė:

– Ne, lik čionai.

– Ar tau smalsu?

– Žinoma, smalsu.

– Tada klausykis atidžiai. Jei sudėsi visus paprastuosius skaičius nuo vieno iki dvylikos, kiek bus?

– Ojojoi, – sudejavo Robertas. – Koks nuobodus uždavinys! Sakytum, ne tavo, o daktaro Oželio sugalvotas.

– Nenusimink. Su trikampiais skaičiais rasti tą sumą visai lengva. Paprasčiausiai paimi dvyliktąjį trikampį skaičių ir jau matai atsakymą.

Robertas metė žvilgsnį į vandenį ir suskaičiavo:

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78 . . .

– Septyniasdešimt aštuoni.

– Teisingai.

– Bet kodėl?

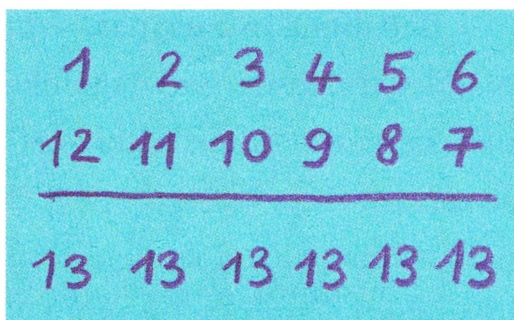
Skaičių kipšas paėmė lazdelę ir parašė ant vandens:

1 2 3 4 5 6
12 11 10 9 8 7

– Pakanka tik surašyti skaičius nuo vieno iki dvylikos vieną po kitu, bet pirmuosius šešis – iš kairės į dešinę, o kitus šešis – iš dešinės į kairę, ir pamatysi kodėl:

Apačioj pabraukiam:

Dabar sudedam:



Matai?

– Šešiskart trylika, – tarė Robertas.

– Čia jau turbūt išsiversi ir be skaičiuotuvo.

– Šešiskart trylika, – pakartojo Robertas, – bus septyniasdešimt aštuoni.

– Dvyliktasis trikampis skaičius. Viskas atitinka! Dabar matai, kiek naudos iš trikampių skaičių. Beje, keturkampiai skaičiai irgi šio to verti.

– O aš maniau, kad dabar jau eisim maudytis.

– Išsimaudyti dar spėsim. Pirmiau keturkampiai skaičiai.

Robertas ilgesingai pažvelgė į baseiną, kuriame turškėsi trikampiai skaičiai, išsirikiavę vorele kaip ančiukai paskui savo motiną.

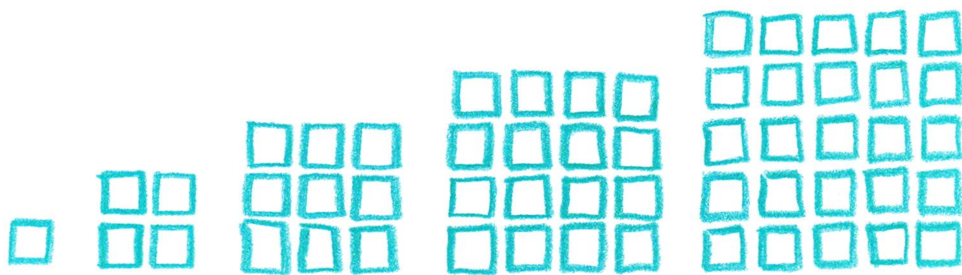
– Jei tu ir toliau taip elgsies, – pagrasino jis, – aš imsiu ir pabusiu, ir dings visi skaičiai.

– Bet dings ir baseinas, – perspėjo senis. – Be to, juk gerai žinai, kad negali liautis sapnavęs kada tik užsimanai. Ir apskritai, kas čia viršininkas? Tu ar aš?

Ir vėl jis pyksta, sumetė Robertas. Ko gero, vėl ims šaukti. Žinoma, tik sapne. Bet aš nenoriu būti aprėktas, kad ir sapnuodamas. Velniai žino, kas jam dar šovė į galvą.

Senolis paėmė iš kelioninio šaldytuvo keletą ledo kubelių ir padėjo ant stalo.

– Nieko baisaus, – guodė jis Robertą. – Viskas taip pat kaip pirma su kokoso riešutais, tik šįsyk ne trìkampiai, o kvadratai:



– Žinai, – tarė Robertas, – gali man ir neaiškinti. Čia juk ir aklam aišku. Vien pašokdinti skaičiai, argi ne? Suskaičiuoju, kiek kubelių yra viename kvadrato šone, ir tą skaičių pašokdinu:

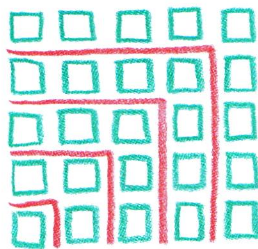
$$1 \times 1 = 1^2 = 1$$
$$2 \times 2 = 2^2 = 4$$
$$3 \times 3 = 3^2 = 9$$
$$4 \times 4 = 4^2 = 16$$
$$5 \times 5 = 5^2 = 25$$

Na ir taip toliau, kaip visada.

– Labai gerai, – pagyrė jį Skaičių kipšas. – Velnioniškai gerai. Tu, mielasis, būsi geriausias mano mokinys, tikras burtininkas, to nepaneigsi.

– Bet aš noriu maudytis, – inkštė Robertas.

Jei kam negana, tas gali dar truputį pažaisti su ledo kubeliais, kol jie neištirpę. Reikia tik nubrėžti kelias linijas tarp kubelių, štai taip:



O apačioj surašyti skaičius: 1 3 5 7 9

Tiek kubelių yra kiekviename kampe, kurį įbrėžėt į kvadratą. Jei dabar sudėsite tuos skaičius nuo 1 iki 9, kiek bus? Skaičius, su kuriuo jau buvot susidūrę!

– O gal norėtum dar sužinoti, kaip veikia penkiakampiai skaičiai? Arba šešiakampiai?

– Ne, ačiū, tikrai nebenoriu, – tarė Robertas, atsikėlė ir šoko į vandenį.

– Palūkėk bent kiek, – stabdė jį Skaičių kipšas. – Juk baseine pilna skaičių. Palauk, kol aš juos išžvejosiu.

Tačiau Robertas jau plaukė, o skaičiai suposi aplink jį ant bangelių, vien trikampiai skaičiai; jis plaukė vis tolyn, kol nebebuvo girdėti, ką ten jam šaukia senolis. Mat šis plaukimo baseinas buvo be galo ilgas, begalinis kaip skaičiai ir toks pat stebuklingas.

Šešta naktis

– Tikriausiai manai, kad aš vienintelis toks, – prašneko Skaičių kipšas, kai tik vėl pasirodė. Šį kartą jis sėdėjo ant sulankstomos kėdutės beribiame bulvių lauke.

– Kas vienintelis? – nesuprato Robertas.

– Vienintelis Skaičių kipšas. Bet taip nėra. Aš tik vienas iš daugelio. Ten, iš kur aš kilęs, – Skaičių rojuje, – mūsų knibždėte knibžda. Aš, deja, ne pats didžiausias. Tikrieji galvočiai sėdi savo kabinetuose ir mąsto. Tarpais kuris nors ima juoktis ir šnekėti maždaug taip: „R su indeksu n lygu h su indeksu n, padalytam iš n faktorialo, padauginto iš funkcijos n skliaustelius atidaryti – a plius teta – skliaustelius uždaryti“, o kiti supratingai linkčioja ir pritariamai kikena. Kartais aš visai nebesuprantu, apie ką jie šneka.

– Jei tu toks jau menkas kipšelis, tai ar ne per daug nešiesi? – įgėlė jam Robertas. – Gal man tavęs pagailėti?

– O ką tu manai, kodėl jie mane naktimis išsiunčia valkiotis? Mat vadai turi svarbesnių reikalų, negu lankyti tokius mokinukus kaip tu, mielasis Robertai.

– Vadinasi, man dar pasisekė, kad tave sapnuoju.

– Tik nesuprask manęs klaidingai, – tarė Robertui draugas (juodu jau spėjo gan artimai susidraugauti), – ne taip jau blogai tie aukšti viršininkai sugalvoja. Ypač man patinka toksai Bonačis. Jis man kai kada papasakoja ką sumanęs. Italas. Deja, seniai miręs, bet Skaičių kipšui bene tai svarbu! Simpatingas vyras tas senis Bonačis. Beje, vienas pirmųjų, kurie perprato nulį. Ne jis, tiesa, tą nulį išrado, bet Bonačio skaičiai tai jau tikrai jo nuopelnas. Puikiai sugalvota! Jo išradimas, kaip ir dauguma gerų idėjų, prasideda vienetu – tai tau nebe naujiena. Tikriau sakant, dviem vienetais: 1 + 1 = 2.

Toliau jis kiekvieną kartą ima paskutinius du skaičius ir juos sudeda:

1 = 1
1 + 1 = 2
taigi... 1 + 2 = 3
o paskui... 2 + 3 = 5
vėl du paskutinius... 3 + 5 = 8
ir taip toliau. 5 + 8 = 13
– Iki begalybės. 8 + 13 = 21
– Žinoma.

Dabar Skaičių kipšas sėdėdamas ant savo kėdutės ėmė berti Bonačio skaičius vos ne repo stiliumi. Skambėjo tikrų tikriausios Bonačio operos rečitatyvas:

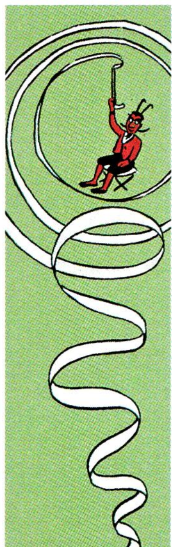
– Vienas vienas du trys penki aštuoni trylika dvidešimt vienas trisdešimt keturi penkiasdešimt penki aštuoniasdešimt devyni šimtas keturiasdešimt keturi du šimtai trisdešimt trys trys šimtai septyniasdešimt septyni...

Robertas pirštais užsikimšo ausis.

– Aš jau baigiu, – tarė senukas. – Gal verčiau aš tau juos surašysiu, tada bus lengviau įsidėmėti.

– Ant ko gi rašysi?

– Ant ko tik nori. Kad ir ant popieriaus.



Jis atsuko lazdelės antgalį ir ištraukė plono popieriaus ritinėlį, numetė jį ant žemės ir paspyrė. Neįtikima, kiek popieriaus tilpo toj lazdelėj! Begalinė juosta riedėjo arimo vaga vis tolyn, kol jos galas dingo iš akių. Ir, žinoma, toje popieriaus juostoje buvo surašyta visa Bonačio skaičių seka, ir tie skaičiai sunumeruoti:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Kitų skaičių Robertas per tą tolumą nebeįžiūrėjo.

– Na ir kas? – nekantravo Robertas.

– Jei sudėsi pirmuosius penkis skaičius ir dar pridėsi vienetą, gausi septintąjį skaičių. O jei sudėsi šešis pirmuosius ir pridėsi vienetą, gausi aštuntąjį. Ir taip toliau.

– Mat kaip, – tarė Robertas. Kas jau čia ypatinga, pamanė jis sau.

– Bet gausi tą patį, jeigu kaskart peršoksi po vieną Bonačio skaičių, tik svarbu nepamiršti pirmojo vieneto, – paaiškino Skaičių kipšas.

Štai pažvelk: 1 + 1 = 2

Dabar peršoki vieną: + 3

ir vėl vieną: + 8

ir dar vieną: + 21

Nagi sudėk tuos keturis skaičius. Kiek bus?

– Trisdešimt keturi, – atsakė Robertas.

– O tai kaip tik pirmas Bonačio skaičius po 21. Jeigu tau atrodo, jog tai per daug sudėtinga, gali pasinaudoti šuoliais. Imi, pavyzdžiui, ketvirtąjį Bonačio skaičių ir jį pašokdini. Ketvirtasis yra 3, o kiek bus 3^2?

– Devyni, – atsakė Robertas.

– Dabar imk tolesnį Bonačio skaičių, penktąjį, ir pašokdink jį.

– $5^2 = 25$, – nedelsdamas ištarškino Robertas.

– Gerai, o dabar sudėk juos abu.

$$9 + 25 = 34$$

– Ir vėl Bonačis, – šūktelėjo Robertas.

– Taip, ir būtent devintasis, nes keturi plius penki lygu devyniems, – pritarė senolis trindamas delnus.

– Supratau. Gražu, ką ir sakyti, bet paaiškink man, kam viso to reikia.

– Ak, – tarė Skaičių kipšas, – tik jau nemanyk, jog matematika vien matematikams ir tereikalinga. Be skaičių ir gamta neišsiverčia. Skaičiuoti moka net medžiai ir sraigės.

– Nesąmonės, – kirto Robertas. – Ne toks aš jau paikas avinas, kad mane už nosies vedžiotum.

– Beje, riestaragiai avinai irgi. Visi gyvūnai. Bent jau į juos žiūrėdamas gali pamanyti, kad Bonačio skaičiai tūno jų galvoj. Jie, ko gero, tą skaičių šokį yra perpratę.

– Netikiu.

– Arba kad ir kiškiai. Vis dėlto jie už sraiges miklesni, argi ne? Negalimas daiktas, kad čia, bulvienoj, nebūtų kiškių!

– Nematau nė vieno, – tarė Robertas.

– Ogi va porelė.

Iš tiesų kur buvę, kur nebuvę du balti kiškučiai tik strykt – ir jau tupi Robertui prie kojų.

– Man rodos, – toliau kalbėjo senis, – jog čia patinėlis ir patelė. Taigi – *viena* pora. Kaip jau žinai, viskas nuo vieno ir prasideda.

– Jis nori man įrodyti, kad jūs mokat skaičiuoti, – kreipėsi į kiškius Robertas. – To jau per daug! Aš netikiu nė vienu jo žodžiu.

– Ak, Robertai, tiek tu ir išmanai apie kiškius, – sutartinai atsiliepė abu kiškučiai. – Nieko tu nežinai! Tikriausiai įsivaizduoji, kad mudu esam baltieji kiškiai.

– Baltųjų kiškių, – atšovė Robertas, kad parodytų ne toks jau neišmanėlis besąs, – žinokit, būna tik žiemą.

– Tikrai. O mes balti tik tol, kol dar maži. Po mėnesio būsim jau suaugę. Tada mūsų kailiukas paruduos ir mudu jau norėsim turėti savų vaikučių. Kol jų sulauksim, – mergytės ir berniuko, – praeis dar vienas mėnuo. Įsidėmėk!

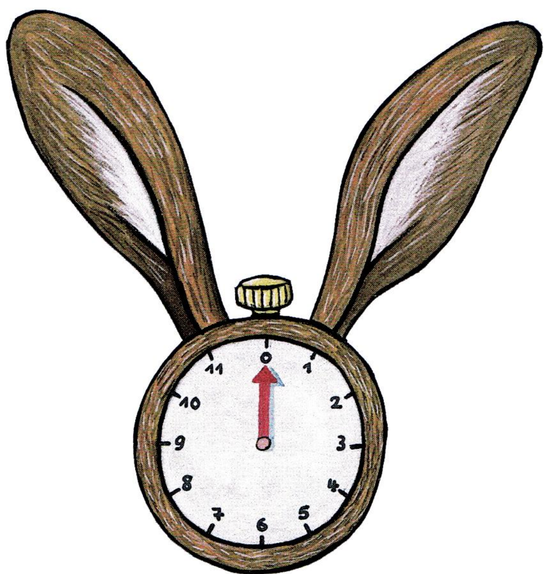
– Jums užteks dviejų? – nusistebėjo Robertas. – O aš visada maniau, kad kiškiai atsiveda gausybę jauniklių.

– Žinoma, mes ir turėsim daugybę mažylių, bet ne visus iš karto. Po du per mėnesį – ir gana. Lygiai taip elgsis ir mūsų vaikeliai. Pamatysi!

– Vargu ar sulauksiu. Kol visa tai įvyks, aš jau seniai būsiu pabudęs. Juk man rytoj rytą reikia į mokyklą.

– Nesirūpink, – įsiterpė Skaičių kipšas. – Čia, bulvienoje, laikas bėga daug greičiau, nei tau rodos. Mėnuo trunka tik penkias minutes. O kad tu patikėtum, atnešiau tau kiškių laikrodį. Še, imk!

Sulig tais žodžiais senis išsitraukė didoką kišeninį laikrodį. Jis turėjo dvi kiškio ausis, bet tik vieną rodyklę:

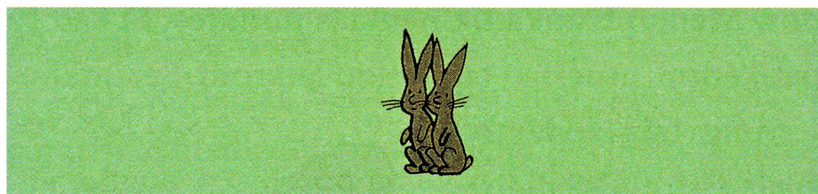


– Žinok, jis rodo ne valandas, bet mėnesius. Kaskart praslinkus vienam mėnesiui suskamba žadintuvas. Kai paspausiu galvutę ten viršuj, laikrodis ims eiti. Tai ką, pradedam?

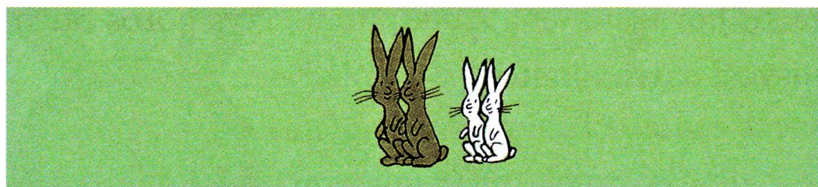
– Pradedam, – šūktelėjo kiškiukai.

– Gerai.

Skaičių kipšas tik spust, laikrodis ėmė tiksėti, sujudo ir rodyklė. Atslinkus jai iki skaičiaus 1, nuaidėjo skambutis. Buvo praėjęs visas mėnuo, kiškiai spėjo gerokai paūgėti, pasikeitė ir jų kailiuko spalva – iš baltos į rusvą.



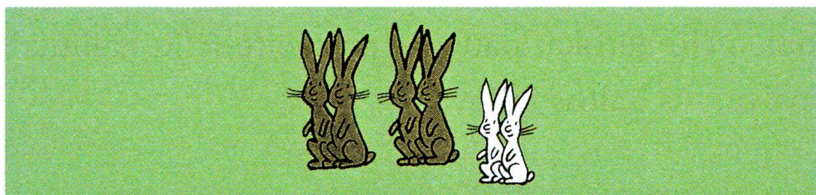
O kai rodyklė pasiekė dvejetą, tai reiškė, kad pralėkė jau du mėnesiai, ir kiškienė atsivedė du mažučius baltučius kiškučius.



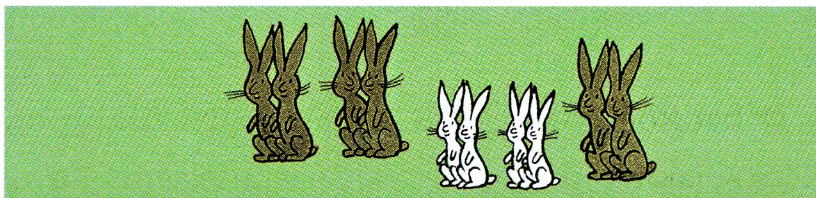
Dabar Robertui prieš akis buvo jau dvi kiškių porelės – jauniklių ir senių. Bet pastariesiems buvo

dar anaiptol negana. Jiems reikėjo dar daugiau vaikelių, ir kai laikrodžio rodyklė nuslinko ligi trijų, vėl suskambo, ir senoji kiškė atsivedė dar du kiškučius.

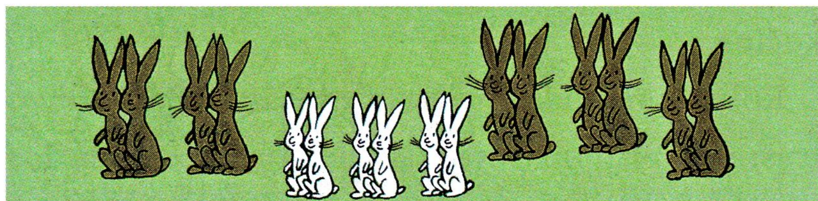
Robertas suskaičiavo kiškių poras. Dabar jų buvo trys: pati pirmoji porelė (rusva), pirmosios vados jaunikliai, per tą laiką jau irgi subrendę (ir parudavę), ir patys jauniausi, dar baltais kailiukais.



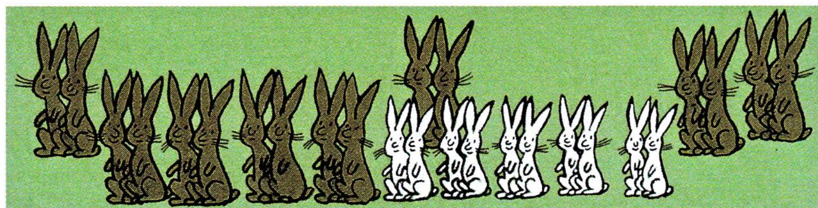
O kai rodyklė parodė keturis, įvyko štai kas: senoji kiškė atsivedė dar vieną porelę prieauglio, jos pirmagimiai – taip pat, antrosios vados palikuonys irgi laiko veltui neleido, taigi dabar bulvienoje straksėjo jau penkios kiškių poros: tėvų pora, trys vaikų poros ir viena anūkų pora. Trys poros buvo rusvos, o dvi – baltos.



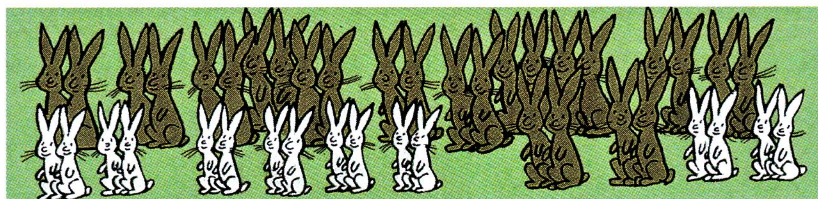
– Aš tavim dėtas, – prašneko Skaičių kipšas, – jau nė nebandyčiau kiekvieno įsidėmėti. Pakaks tau darbo vien juos suskaičiuoti!



Kai laikrodis parodė penkis, Robertas dar visai nesunkiai suskaičiavo aštuonias poras. Šeštą kartą žadintuvui suskambus jų buvo jau trylika. Tai bent knibždėlynas, pagalvojo Robertas; o kas bus toliau!



Bet dar ir septintą kartą jam pavyko suskaičiuoti visus aliai vieno: buvo jų 21 pora.



– Ar tau niekas nekrito į akis? – pasidomėjo Skaičių kipšas.

– Kurgi ne, – atšovė Robertas. – Juk čia vėl tie patys Bonačio skaičiai:

Kiškių laikrodis nė nemanė sustoti. – Gelbėkit! – šaukė Robertas. – Kada gi tai baigsis? Tūkstančiai kiškių – tai jau nebe juokas, tai košmaras!

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ...

Bet jam nespėjus baigti šnekos, dienos šviesą išvydo dar ištisi būriai baltų kiškių; jie susimaišė su gausybe kitų, rusvų ir baltų, straksinčių bulvienoj. Vaikinas nebepajėgė jų skaičiuoti, jam tik akyse mirguliavo. O kiškių laikrodis nė nemanė sustoti. Jo rodyklė jau varė antrą ratą.

– Gelbėkit! – šaukė vaikinas. – Kada gi tai baigsis? Tūkstančiai kiškių! Siaubas!

– Kad akivaizdžiai matytum, kaip visa tai vyksta, atnešiau tau Kiškių lentelę. Ji rodo, kas įvyksta tarp nulio ir septynių valandų, tikriau sakant – mėnesių.

– Jau seniai po septynių, – sušuko Robertas. – Dabar jų tikrai bus per tūkstantį.

– Šiuo metu nei daugiau, nei mažiau kaip 4181, o labai greit, vos po penkių minučių, bus 6765.

– Ar leisi jiems ir toliau taip pat daugintis, kol kiškiai uždengs visą Žemę? – paklausė Robertas.

– O, tai įvyktų gan greitai, – nė nemirktelėjęs išpyškino senolis. – Dar pora rodyklės apsisukimų, ir nebeliktų kur kojos pastatyti.

– Nereikia! – išsigando Robertas. – Tai būtų tikras košmaras! Nejaučiu kiškiams jokios neapykan-

KIŠKIŲ LAIKRODIS	TĖVAI	VAIKAI	ANŪKAI	PROANŪKIAI	BONAČIO POROS
0					1
1					1
2					2
3					3
4					5
5					8
6					13
7					21

tos, sakyčiau, jie man net patinka, bet kas jau per daug, tai per daug. Sustabdyk juos!

– Mielai, Robertai. Bet tik tada, jei pripažinsi, kad kiškiai elgiasi visai taip, lyg būtų išmokę atmintinai visus Bonačio skaičius.

– Pripažįstu, bala tavęs nematė, tik paskubėk, kol jie dar neužlipo mums ant galvos.

Skaičių kipšas dusyk paspaudė kiškių laikrodžio galvutę, ir bematant jis ėmė suktis atgalios. Kaskart žadintuvui suskambus kiškių sumažėdavo, kol laikrodžio rodyklė apsuko porą ratų ir grįžo prie nulio. Tuščiame bulvių lauke stovėjo du kiškiai.

– Ką darysim su šitais? – paklausė kipšas. – Gal nori juos pasilikti sau?

– Tiek to, geriau nereikia. Nes jie vėl pradėtų viską iš naujo.

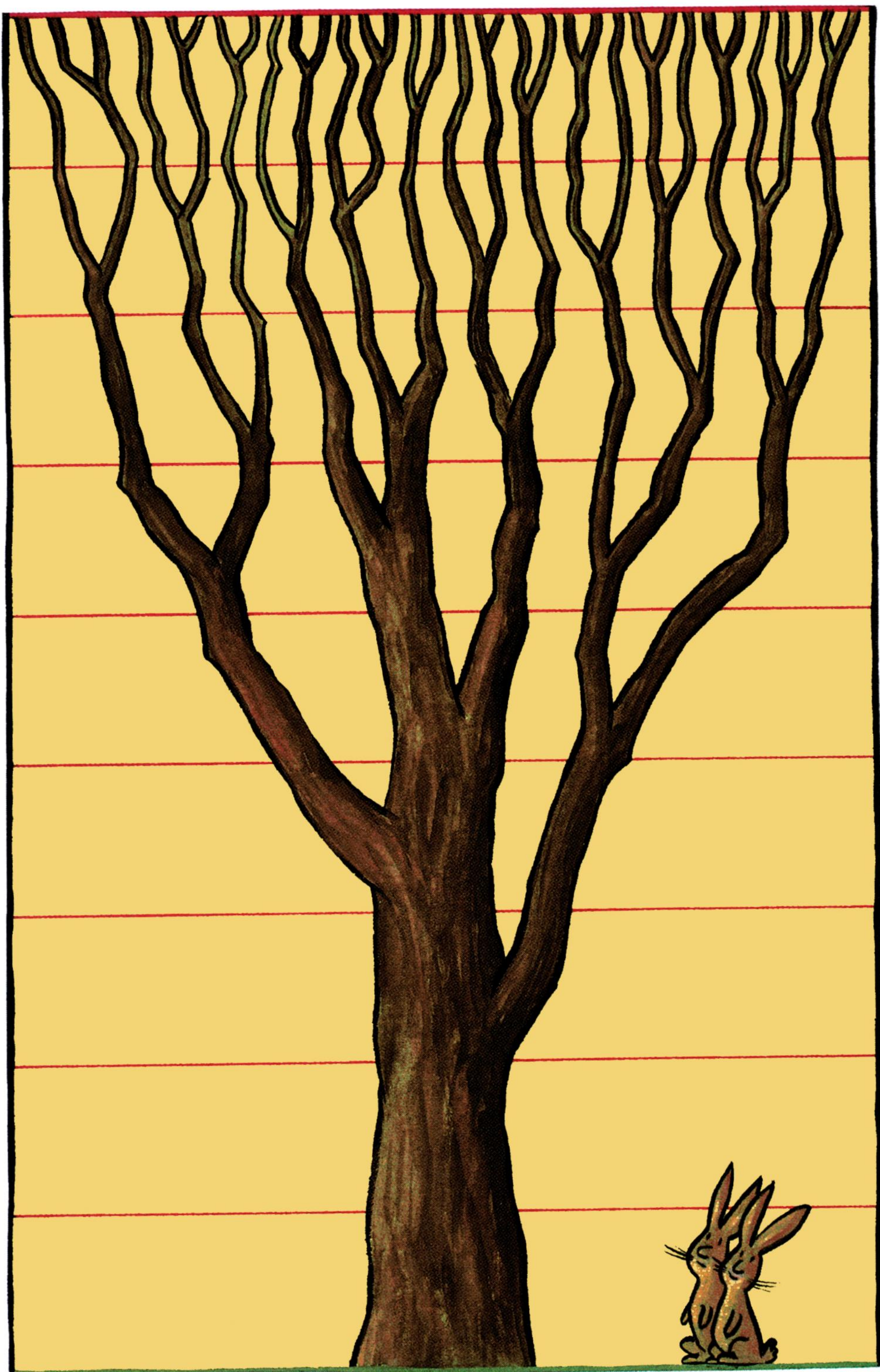
– Taigi, gamtoje taip jau yra, – patvirtino senolis ir ėmė pasimėgaudamas sūpuotis ant kėdutės.

– Taip, kaip ir su tais Bonačiais, – atšovė Robertas. – Tie tavo skaičiai irgi niekaip negali sustoti, vis auga iki begalybės. Nelabai man tai patinka.

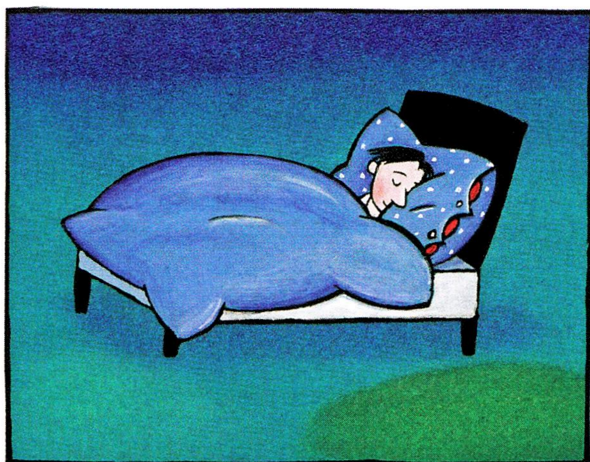
– Bet, kaip pats matei, lygiai taip pat jie grįžta atgal. Juk ir mudu atsidūrėm tame pačiame taške, nuo kurio pradėjom, – prie vieneto.

Taip juodu draugiškai atsisveikino, nebekvaršindami sau galvos, ką dabar veiks paskutinė kiškių porelė. Skaičių kipšas išsinešdino į Skaičių rojų pas seną savo pažįstamą Bonačį ir pas kitus, vis naujų velniavų prasimanančius, o Robertas toliau sau miegojo ir nieko nebesapnavo, kol jį prikėlė žadintuvas. Kaip vis dėlto gerai, pamanė jis, kad tai paprasčiausias žadintuvas, o ne kiškių laikrodis.

Jei kas nors vis dar netiki, kad ir gamta tvarkosi taip, lyg mokėtų skaičiuoti, tegul atidžiai įsižiūri į medžio piešinį gretimame puslapyje. Gal kuriam iš jūsų ir sunkoka buvo susigaudyti tarp tos daugybės kiškių. O medis stovi ramiai, jo šakos nestraksi, tad jas ir suskaičiuoti lengviau. Pradėkit nuo apačios, nuo pirmojo raudono brūkšnio. Jis kerta tik vieną kamieną, kaip ir 2-asis brūkšnys. Dar laiptu aukščiau, 3-iojo brūkšnio lygyje, prisideda dar viena šaka. Dabar skaičiuokit vis toliau. Kiek šakelių yra pačiam viršuje, kur eina 9-asis brūkšnys?


9
8
7
6
5
4
3
2
1

Septinta naktis



– Man neramu dėl Roberto, – tarė mama. – Iš tiesų nežinau, kas jam darosi. Anksčiau jis vis lėkdavo į kiemą arba parką ir žaisdavo futbolą su Albertu, Edvardu, Gustavu ir kitais. O dabar per dienų dienas tupi kambary, bet užuot ruošęs pamokas pasitiesė didelį lapą popieriaus ir be paliovos piešia kiškius.

– Patylėk, – nutraukė ją Robertas. – Tu mane blaškai. Man reikia susikaupti.

– Be to, jis visą laiką murma skaičius, skaičius, skaičius. Argi tai normalu!

Ji šnekėjo sau ir šnekėjo, tarsi Roberto nebūtų kambary.

– Pirmiau jis skaičiais nesidomėjo nė iš tolo. Net priešingai, vis šaipydavosi iš mokytojo, kam užduoda skaičiuoti. Eik laukan, į tyrą orą, – šūktelėjo ji pagaliau.

– Tavo tiesa. Jei dar ilgiau skaičiuosiu kiškius, man ims galvą skaudėti.

Ir Robertas išėjo iš namų. Parke plytėjo didelė pieva, o joje – nė vieno zuikio.

– Ei, Robertai, – jau iš tolo pašaukė jį Albertas. – Ar žaisi su mumis?

Ten buvo dar Edvardas, Gustavas, Ivanas ir Karolis. Jie žaidė futbolą, bet Robertas nepanoro prisidėti. Jie juk visai nenutuokia, kaip auga medžiai, pagalvojo jis.

Namo Robertas grįžo jau vėlokai, o tuoj po vakarienės susiruošė gulti. Dėl visa ko įsimetė į pižamos kišenę storą flomasterį.

– Nuo kada tu taip anksti eini miegoti? – nusistebėjo mama. – Pirma vis stengdavaisi vakaroti kuo ilgiau.

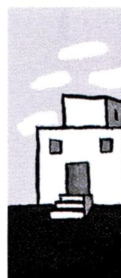
Bet Robertas gerai žinojo ko nori, žinojo ir tai, kodėl mamai nieko nepasipasakoja. Juk ji vis tiek nepatikėtų išgirdusi, kad kiškiai, medžiai ir net sraigės moka skaičiuoti ir kad jis susidraugavo su Skaičių kipšu.

Vos tik jis įmigo, senis jau ir čia.

– Kad tu žinotum, ką aš tau šiandien parodysiu, – išpyškino jis.

– Rodyk ką nori, tik jau ne kiškius. Prisikankinau su jais per dieną. Vis, būdavo, supainioju baltuosius su rusvaisiais.

– Mesk juos iš galvos! Eikš.



Kipšas nuvedė Robertą prie balto kubinio namo. Jame irgi viskas buvo baltai dažyta, net laiptai ir durys. Juodu įėjo į didelį tuščią kambarį sniego baltumo sienomis.

– Net atsisėsti nėra kur, – nusiskundė Robertas. – O kas čia per akmenys?

Jis priėjo prie aukštos krūsnies kambario kampe ir atidžiau įsižiūrėjo į akmenis.

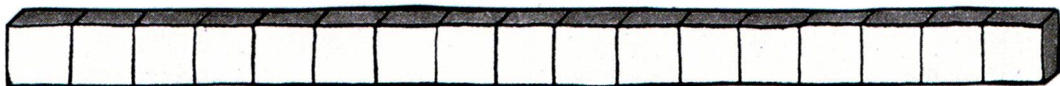
– Sakyčiau, lyg ir stiklas, lyg plastikas, – svarstė vaikinas. – Vien didoki kubeliai. O viduj kažkas blyksi. Gal elektros laidai ar kas panašaus.

– Elektronika, – patikslino jį senolis. – Jei nori, krausim piramidę.

Jis paėmė porą kubelių ir padėjo juos vieną greta kito ant baltų grindų.

– Dabar tu, Robertai.

Toliau darbavosi abudu, kol surikiavo tokią eilę:



– Stok! – liepė Skaičių kipšas. – Kiek kubelių jau turim?

Robertas suskaičiavo.

– Septyniolika. Betgi tai netikęs skaičius, – tarė jis.

– Ne toks jau netikęs, kaip tau rodos. Nagi atimk iš jo vienetą.

– Lieka šešiolika. Vėl pašokdintasis skaičius. Keturiskart pašokdintas dvejetas. 2^4.

– Ką aš girdžiu! – pasidžiaugė senolis. – Viską tu pastebi. Bet dabar mūrysim toliau. Kiekvieną plytą taikysim tiksliai virš dviejų apatinių plytų siūlės, kaip tikri mūrininkai.

– Puiku, – tarė Robertas. – Bet piramidės šitaip nepastatysim. Piramidės pagrindas būna trikampis arba keturkampis, o mūsų statinys bus paplokščias. Išeis ne piramidė, o trikampis.

– Tebūnie taip, – sutiko Skaičių kipšas. – Statom trikampį. – Ir juodu tol darbavosi, kol pasiekė viršūnę:

– Sakyčiau, lyg ir stiklas, lyg plastikas, – svarstė Robertas. – Vien didoki kubeliai. O viduj kažkas blyksi. Gal elektros laidai ar kas panašaus.

– Baigta! – pranešė Robertas.

– Sakai, baigta? Iš tiesų tik dabar prasideda.

Skaičių kipšas užsikorė vienu trikampio šonu iki pat viršutinio kubelio ir ant jo užrašė vienetą.

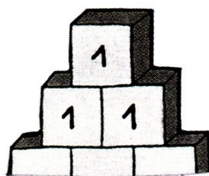
– Kaip visada, – sumurmėjo Robertas. – Tau tik vienetas ir vienetas!

– Be abejo, – atrėžė senolis. – Viskas prasideda nuo vieneto. Juk ir pats žinai.

– O kas toliau?

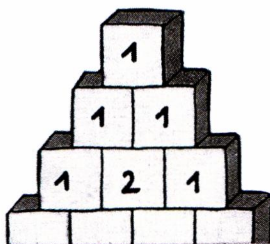
– Tuoj pamatysi. Ant kiekvieno kubelio rašysim skaičių, gautą sudėjus tai, kas yra čia pat virš jo.

– Anokia čia gudrybė, – tarė Robertas, išsitraukė iš kišenės storąjį flomasterį ir parašė:



– Vienetai ir daugiau nieko. Tiek dar sumetu ir be skaičiuotuvo.

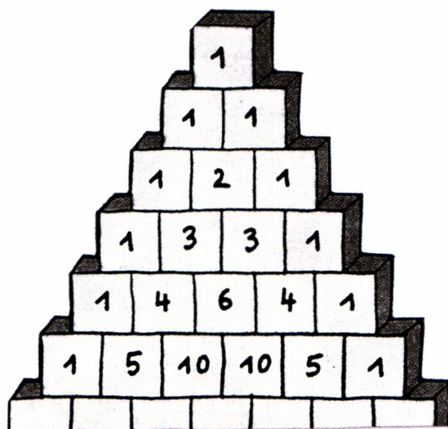
– Tuoj bus ir daugiau. Varyk toliau, varyk. – Ir Robertas parašė:



– Vaikų žaidimas, – nusprendė.

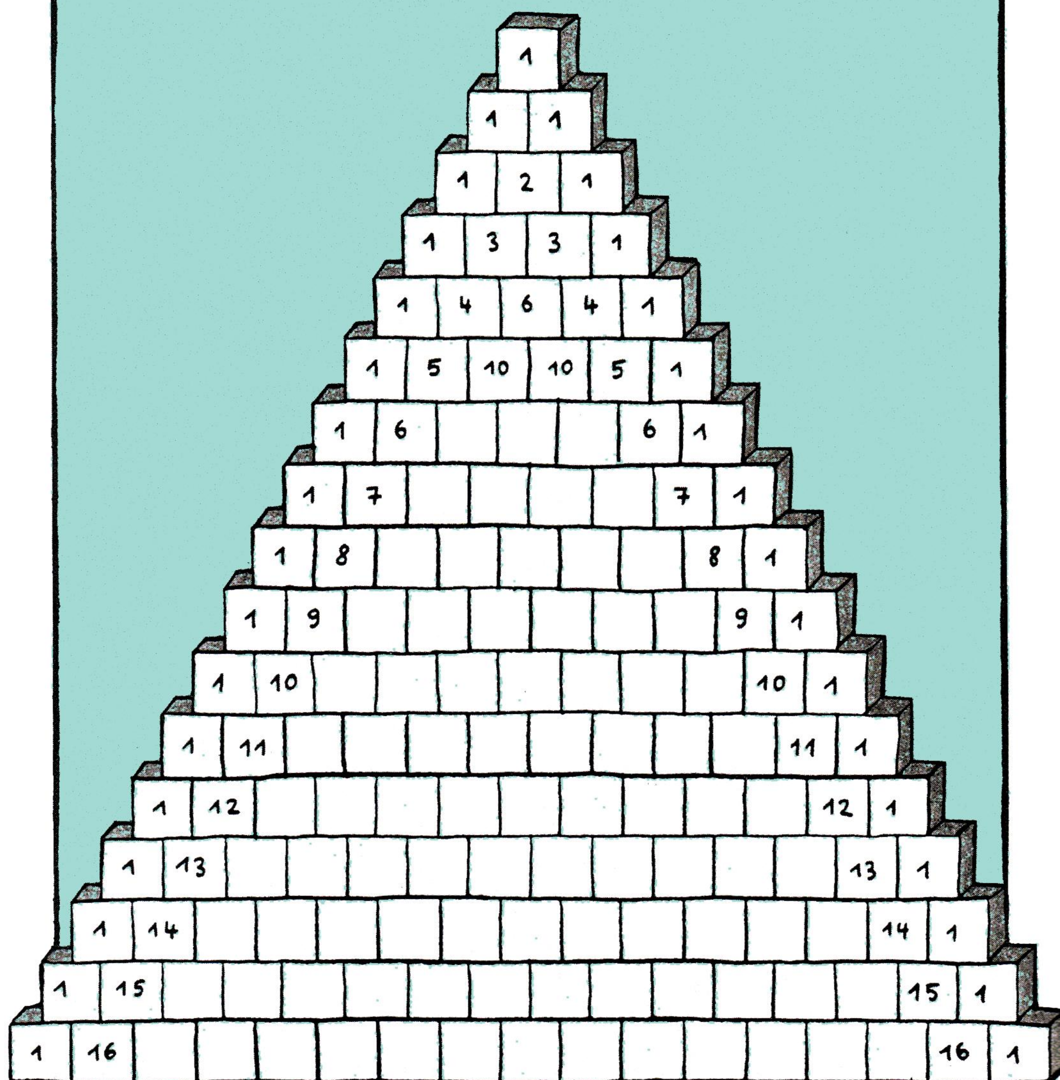
– Tik neskubėk didžiuotis, mielasis. Pamatysi, kas bus toliau.

Robertas tik skaičiavo ir rašė:



– Jau matau, kad pakraščiais – vien tik vienetai, nuo viršaus iki pat apačios. Ir gretimus skaičius, kurie užima įstrižą eilutę, surašysiu be niekur nieko: juk tai paprasčiausi eiliniai skaičiai – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...

Jis palaipiojo trikampiu aukštyn žemyn ir surašė:



– O kas yra gretimoj įstrižoj eilutėj, visai šalia tų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...? Nagi pasakyk pirmuosius keturis skaičius.

Skaičių kipšas vėl nutaisė suktą šypsenėlę, o Robertas skaitė ką parašęs įstrižoj eilutėj, kuri prasideda viršuj dešinėj ir leidžiasi kairėn:

– 1, 3, 6, 10... Kažkas lyg ir pažįstama.

– Kokosai, kokosai, – priminė senis.

– Tikrai, dabar jau prisimenu. Juk 1, 3, 6, 10 yra trikampiai skaičiai.

– O kaip jie sudaromi?

– Deja, pamiršau, – atsiduso Robertas.

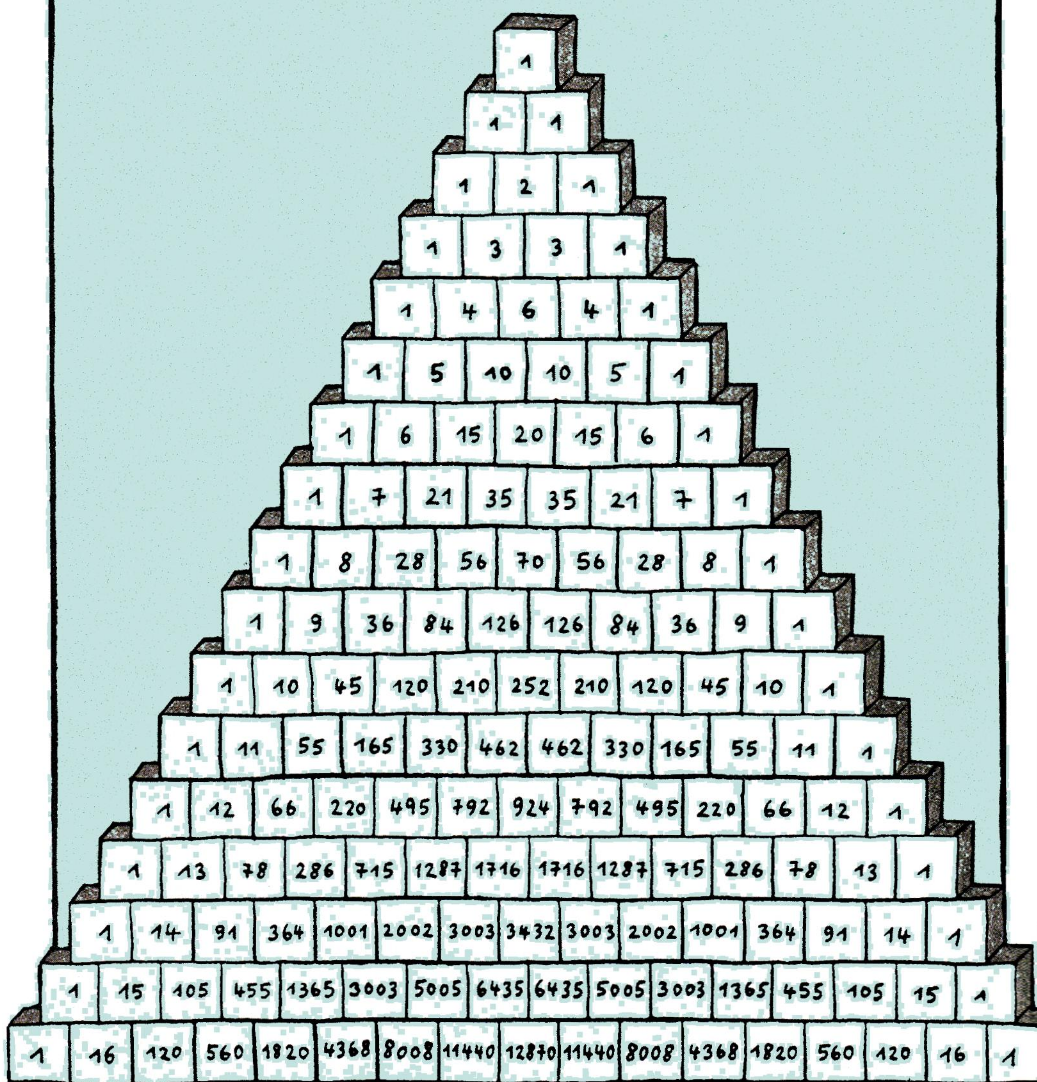
– Visai paprastai:

1 + 2 = 3
3 + 3 = 6
6 + 4 = 10
10 + 5 = 15

– ...15 + 6 = 21, – pratęsė Robertas.

– Na, matai!

Tokia tvarka Robertas ir toliau rašė skaičius ant kubelių. Kuo toliau, tuo lengviau, nes nebereikia taip aukštai kopti, bet, antra vertus, tie prakeiktieji skaičiai kaskart vis didesni.


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1

– Na jau ne, – purkštavo jis. – Nesitikėk, kad aš galėsiu juos visus apskaičiuoti mintinai.

– Kaip žinai, – atsiliepė senolis. – Bet nesijaudink. Būtų tikra velniava, jeigu aš to nepadaryčiau akimoju!

Tai taręs ėmė ir užpildė visą trikampį neįsivaizduojamu greičiu.

– Na bet ir ankšta ten pačioj apačioj, – nusistebėjo Robertas. – 12870! Tai bent!

– Čia tik mažmožis. Pamatysi, kiek dar visko slypi tame trikampyje.

Kurgi ne! Gal pamanysite, kad jis galvai kvaršinti tetinka. Klystate! Priešingai, jis pravers tinginiams, kurie nelinkę ilgai skaičiuoti. Jeigu jūs, pavyzdžiui, norite sužinoti pirmųjų dvylikos trikampių skaičių sumą, jums pakanka paimti trečiąją įstrižą eilutę, prasidedančią skaičiais 1, 3, 6, 10, ir vesti pirštu žemyn dešinėn iki dvylikto tos eilutės kubelio. Dabar pažiūrėkite, koks skaičius čia pat apačioj iš kairės. Na ir kiek?

Turint tokį trikampį jums nebereikia skaičiuoti, kiek bus 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78.

– Ar išvis įsivaizduoji, ką mudu čia sukrovėm? – gudriai paklausė Skaičių kipšas. – Tai ne šiaip sau trikampis, tai monitorius! Kompiuterio ekranas. Kaip manai, kodėl kiekvieno kubelio viduje mirga elektronika? Pakanka man tą aparatą įjungti ir jis ims švytėti.

Senis suplojo delnais ir kambarys aptemo. Suplojo dar sykį – ir pirmasis, pats viršutinis, kubelis nušvito raudonai.

– Ir vėl vienetas, – nusivylė Robertas.

Dar kartą kipšui suplojus pirmoji eilutė užgeso, o antroji nušvito kaip raudonas šviesoforo signalas.

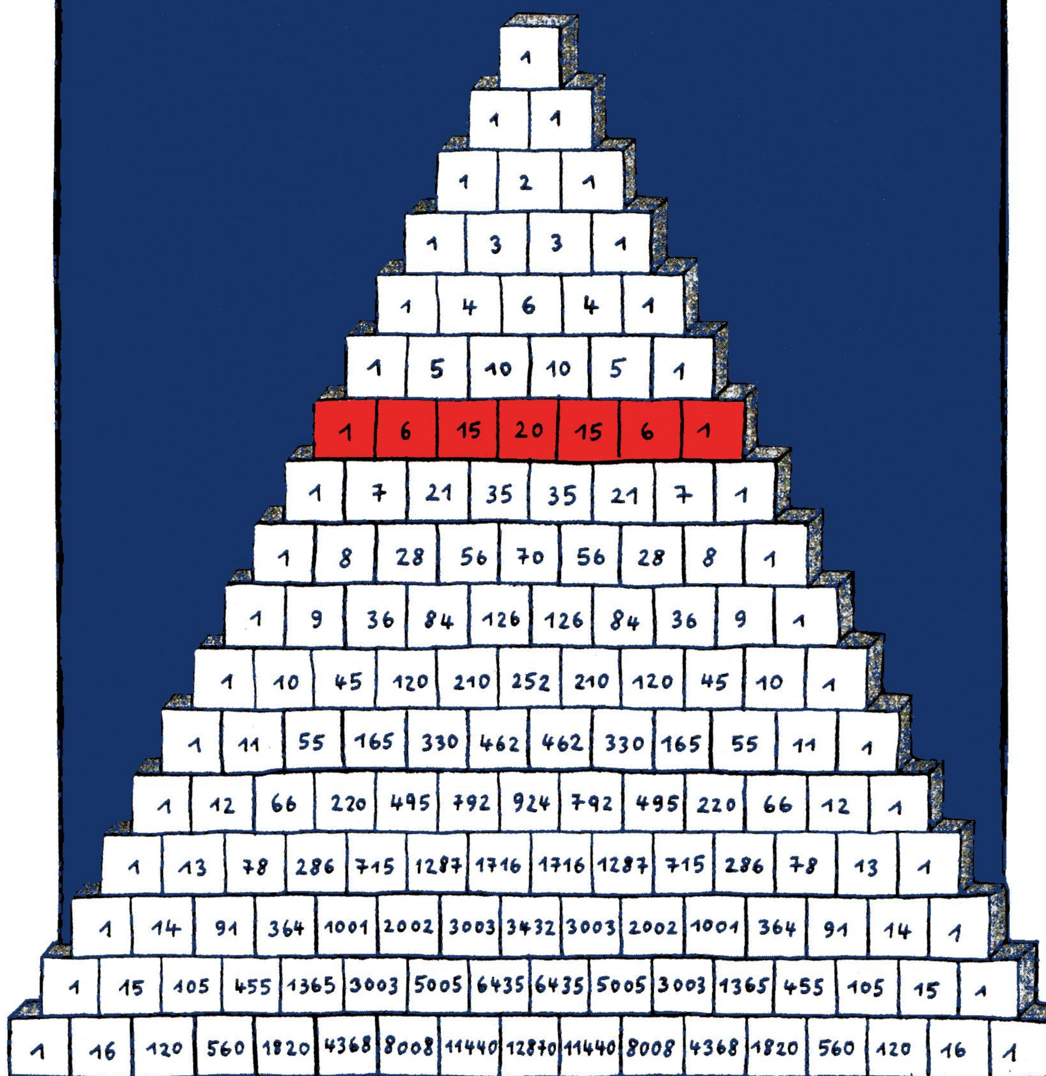
– Nagi suskaičiuok, – paragino senolis.

– $1 + 1 = 2$, – sumurmėjo Robertas. – Nieko ypatingo!

Skaičių kipšas vėl suplojo; dabar paraudo trečioji eilutė.

– $1 + 2 + 1 = 4$, – šūktelėjo vaikinas. – Gali daugiau nebeploti. Aš jau supratau. Čiagi seni mūsų pažįstami – pašokdintieji dvejetai. Tolesnėj eilutėj bus $2 \times 2 \times 2$, arba 2^3, tai yra 8. Ir taip toliau: 16, 32, 64. Iki pat trikampio apačios.

– O paskutinės eilutės suma, – pridūrė senis, – lygi 2^{16}, o tai jau nemažai. Jei nori žinoti tiksliai – 65 536.



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1

– Gal tiek to, nereikia!

– Dėl manęs. – Skaičių kipšas suplojo delnais ir trikampis vėl aptemo.

– Gal nori susitikti dar vieną kitą seną pažįstamą? – paklausė jis.

– Nelygu kokį.

Senolis triskart suplojo ir kubeliai vėl sušvito: vieni geltonai, kiti mėlynai, žaliai arba raudonai.

– Tikras karnavalas, – šyptelėjo Robertas.

– Ar matai vienos spalvos pakopas, kurios leidžiasi iš dešinio krašto į kairįjį, bet nesusisiekia? Mes sudėsim visus kiekvienų tokių laiptų skaičius ir pažiūrėsim, kiek išeis. Pradėk nuo pat viršaus, nuo raudono kubelio!

– Ten tik viena pakopa, – tarė Robertas. – Vienas, kaip visada.

– Po juo yra geltonas.

– Irgi tik vienas.

– Toliau – mėlyni laiptukai. Dvi pakopos.

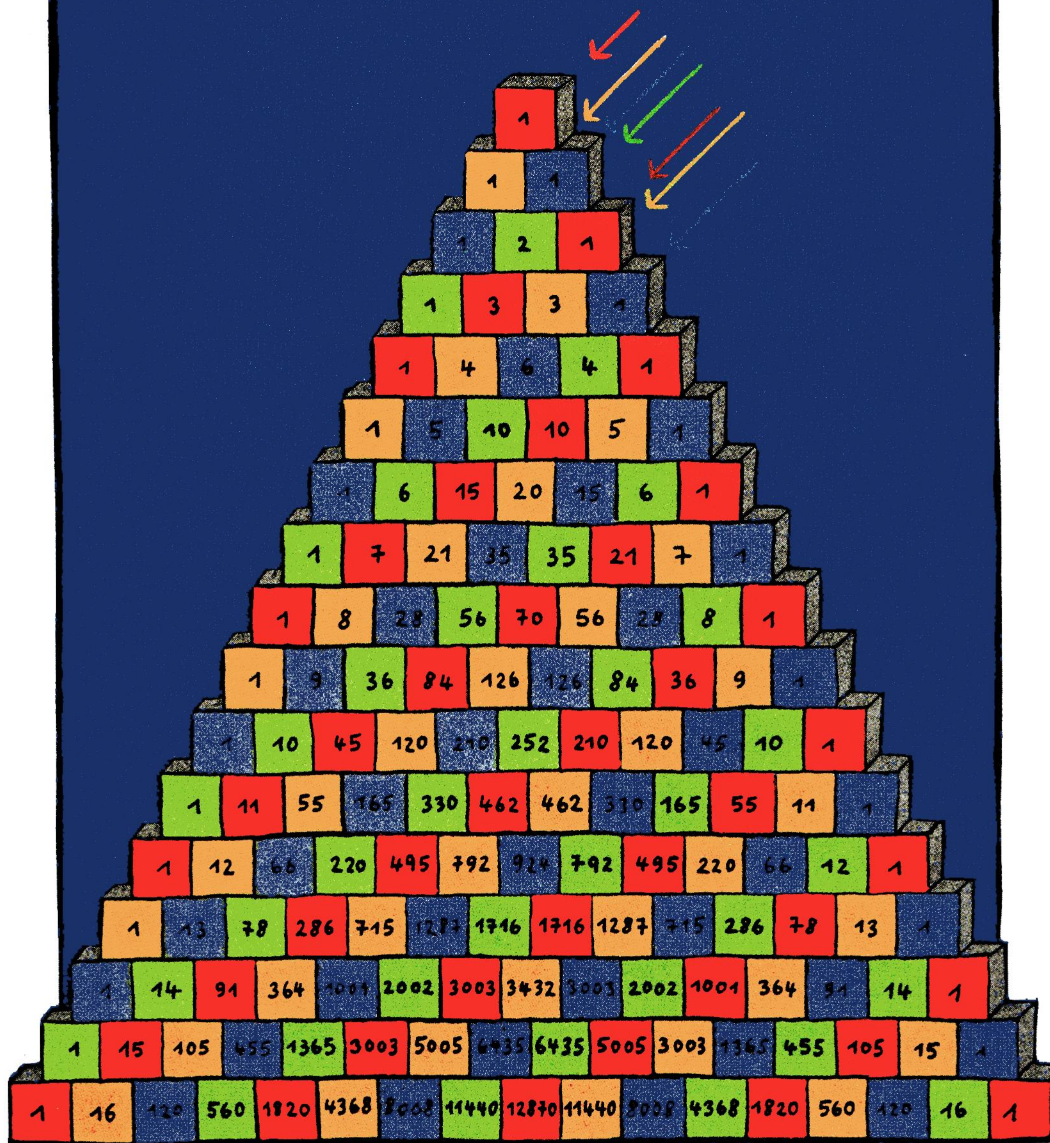
– 1 + 1 = 2.

– Čia pat greta – ir žali. Du žali kubeliai.

– 2 + 1 = 3.

Dabar jau Robertui ir pačiam aišku, kas toliau.

– Vėl raudoni: 1 + 3 + 1 = 5. Ir geltoni: 3 + 4 + 1 = 8. Mėlyni: 1 + 6 + 5 + 1 = 13.


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1

– Ką tai galėtų reikšti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...

– Kaipgi, Bonačis! Kiškių skaičiai.

– Dabar matai, kiek visokių dalykų slypi mūsų trikampyje! Galėtume dar tęsti ir tęsti, bet, ko gero, šiandien tau pakaks.

– Džiaugiuosi, kad susipratai, – pritarė Robertas.

– Ką gi, toliau nebeskaičiuojam.

Skaičių kipšas suplojo rankomis ir kubelių margumynas užgeso.

– Bet mūsų monitorius gali kur kas daugiau. Žinai, kas nutiks, jei aš dar kartą suplosiu? Visame trikampyje lyginiai skaičiai nušvis, o nelyginiai liks tamsūs. Ar nori?

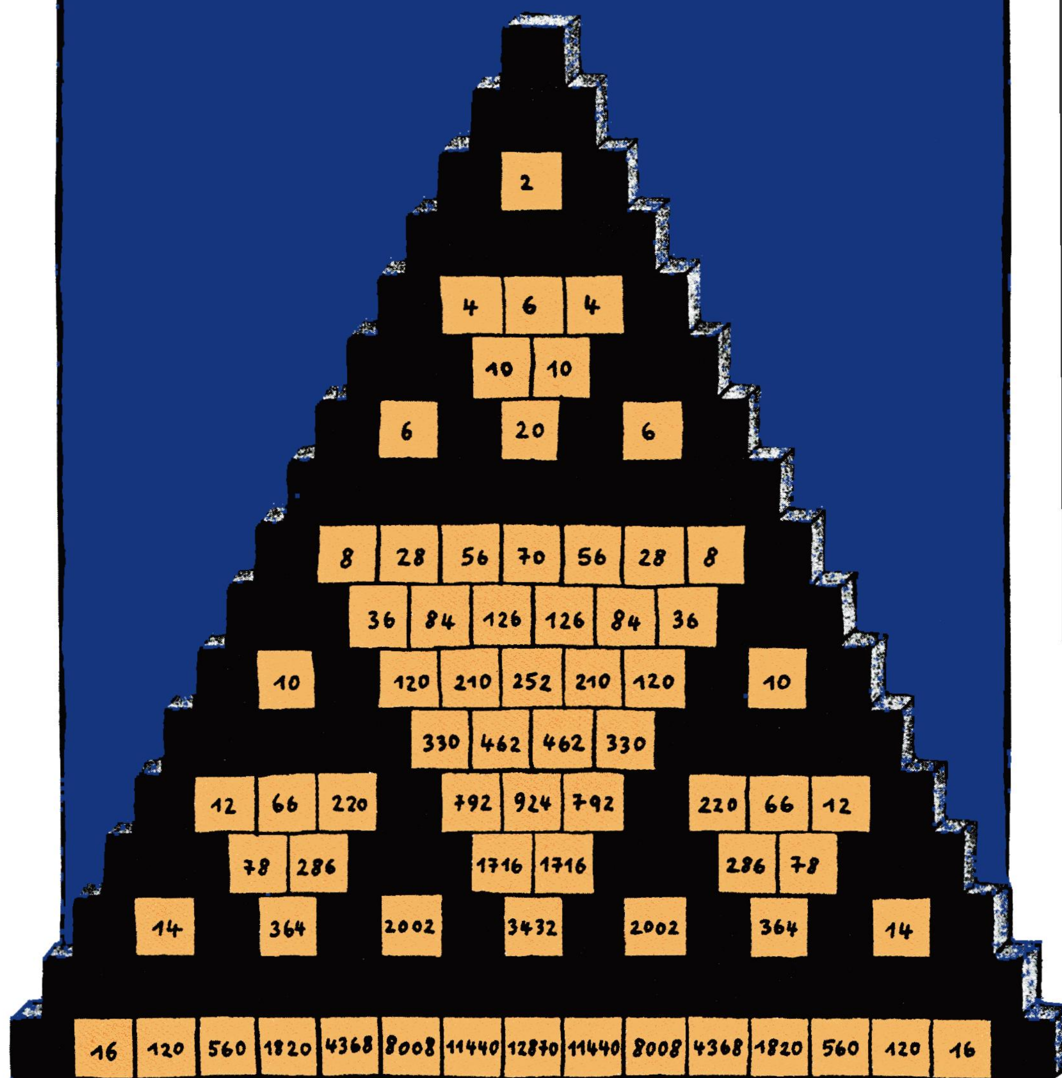
– Dėl manęs.

Tai, ką dabar išvydo Robertas, buvo jam netikėta.

– Kad tave kur! Kokie ornamentai! Maži trikampiai didžiajame trikampyje, tik apversti.

Robertas džiūgavo.

– Vieni didesni, kiti mažesni, – pridūrė Skaičių kipšas. – Mažiausius sudaro 1 kvadratėlis, bet iš tiesų jie irgi yra trikampiai. Kiekvienas vidutinis sudarytas iš 6 kubelių, o didžiausias – iš 28. Žinoma, ir 1, ir 6, ir 28 yra trikampiai skaičiai.



2
4 6 4
10 10
6 20 6
8 28 56 70 56 28 8
36 84 126 126 84 36
10 120 210 252 210 120 10
330 462 462 330
12 66 220 792 924 792 220 66 12
78 286 1716 1716 286 78
14 364 2002 3432 2002 364 14
16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16

– Dabar geltonai šviečia tik lyginiai skaičiai, – toliau šnekėjo senolis. – O kaip manai, kas atsitiks, jei išryškinsiu monitoriuje skaičius, kurie dalijasi iš trijų, keturių arba penkių? Man pakanka delnais pliaukštelėti, ir nušvis atitinkami kubeliai. Kurį daliklį išbandom, gal penketą?

– Taip, – pritarė Robertas. – Tegu nušvinta visi skaičiai, kurie dalijasi iš penkių.

Senis suplojo, geltonieji skaičiai užgeso ir sužibo žali.

– Tokio dalyko nebūčiau net susapnavęs, – stebėjosi Robertas. – Ir vėl vien trikampiai, bet jau kiti. Burtai ir tiek!

– Taigi, mielasis, aš ir pats dažnai svarstau, kur baigiasi matematika ir prasideda burtai.

– Fantastika. Ar tu pats visa tai ir išradai?

– Ne.

– O kas?

– Velniai žino! Didysis skaičių trikampis – labai senas dalykas, daug senesnis už mane.

– Man ir tu jau atrodai ganėtinai senas.

5 10 10 5
15 20 15
35 35
70

10 45 120 210
55 165 330
220 495
715

210 120 45 10
330 165 55
495 220
715

15 105 455 1365
120 560 1820

5005 6435 6435 5005
11440 12870 11440

1365 455 105 15
1820 560 120

– Aš? Atsiprašau, Skaičių rojuje aš vienas jauniausių. Mūsų trikampiui jau mažų mažiausiai du tūkstančiai metų. Ar tik ne kažkokiam kinui šovė į galvą jo idėja. Bet mes dar ir šiandien jį tyrinėjam ir vis atrandam naujų stebėtinų jo galimybių.

Jeigu jūs ir toliau taip elgsitės, pamanė sau Robertas, tai tikriausiai ir galo nebus. Bet nutylėjo.

Ir vis dėlto Skaičių kipšas įžvelgė jo mintį.

– Taip, matematika – tai kelionė be pabaigos, – kalbėjo jis. – Eini, eini ir vis dar randi ką nors nauja.

– Argi jūs taip ir negalit liautis? – pasidomėjo Robertas.

– Aš ne, bet tu gali, – sušnibždėjo Skaičių kipšas. Sulig tais jo žodžiais žalieji kubeliai vis labiau blėso, o jis pats tolydžio lieknėjo, kol tapo plonas kaip makaronas. Kambaryje buvo tamsu tamsu, ir netrukus Robertas viską pamiršo: margus kubelius, trikampius, Bonačio skaičius ir net savo bičiulį Skaičių kipšą.

Ilgai miegojo Robertas, o kai kitą rytą pabudo, mama jį paklausė:

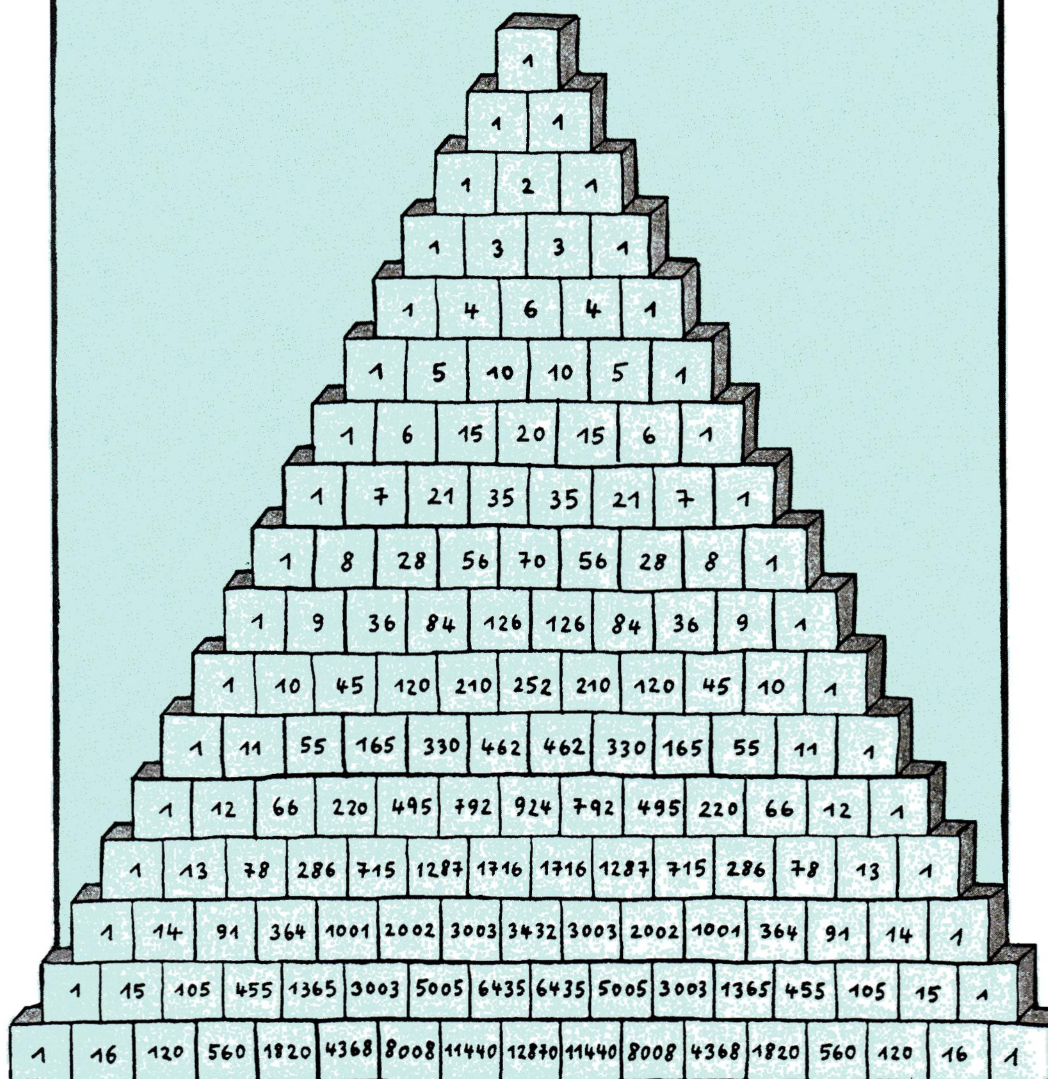
– Tu toks išblyškęs, Robertai. Ar sapnavai blogą sapną?

– Oi ne, kodėl klausi?

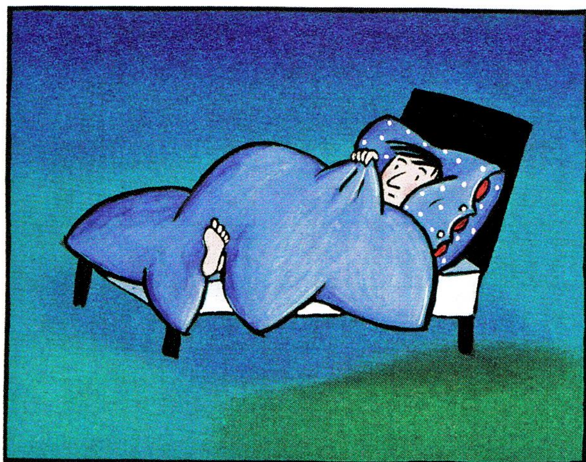
– Man neramu, ar tik tu nesergi.

– Ką tu, mama, juk žinai: kas velnią mini, tas ir prisišaukia.

Gal kam įdomu žinoti, koks raštas išryškėtų monitoriuje sušvitus visiems skaičiams, kurie dalijasi iš keturių? Tai visai paprasta kiekvienam iš jūsų, ne tik Skaičių kipšui. Paimkite spalvotą pieštuką ir uždažykite visus skaičius, kurie dalijasi iš keturių. Jei skaičius didesnis už tuos, kurie yra daugybos lentelėje, galite pasinaudoti skaičiuotuvu. Surenkate tą skaičių, paspaudžiate : 4 *ir matote, yra kas nors po kablelio ar nėra. O patį trikampį rasite atvertę kitą puslapį.*


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1

Aštunta naktis



Robertas stovėjo prie klasės lentos. Pirmame suole sėdėjo du geriausi jo draugai: futbolininkas Albertas ir Beata, toji su kasytėmis. Juodu, kaip visada, ginčijosi.

To man dar tetrūko, galvojo Robertas. Pradėsiu sapnuoti mokyklą!

Bet štai atsidaro durys, ir kas gi įeina – ne dr. Oželis, o Skaičių kipšas.

– Labas rytas, – tarė jis. – Matau, jūs jau ir vėl ginčijatės. Ir dėl ko?

– Beata atsisėdo mano vietoj, – suniurzgė Albertas.

– Tai pasikeiskit vietomis.

– O ji nenori, – atšovė Albertas.

– Parašyk lentoj, Robertai, – liepė senis.

– Ką rašyti?

– Rašyk A ir B: tai reikš Albertą ir Beatą. Albertas sėdi kairėj, o Beata – dešinėj.

Robertas nesuprato, kam to reikia, bet pamanė: jeigu jie taip nori, tegul.

AB

– Na, o dabar, Beata, – liepė Skaičių kipšas, – tu sėskis kairėj, o Albertas tau iš dešinės.

Keista, bet Beata neprieštaravo. Ji mikliai pakilo ir pasikeitė vietomis su Albertu. O Robertas parašė lentoj

BA

Tą akimirką vėl prasivėrė durys ir įžengė Cecilija, vėluodama kaip visada. Ji atsisėdo šalia Beatos iš kairės. Ir Robertas parašė

CBA

Tačiau Beatai tokia tvarka nepatiko. Jeigu jau kairėj, tai visai kairėj!

– Dėl Dievo meilės, – sušnypštė Cecilija. – Jeigu jau taip nori! – Ir jiedvi susikeitė:

BCA

Bet dabar jau Albertas buvo nepatenkintas. – Aš juk norėjau sėdėti šalia Beatos, – niurzgė jis. Cecilija netarusi nė žodžio atsikėlė ir užleido savo vietą Albertui:

BAC

Jeigu taip reikalai ir toliau klostytis, pamanė Robertas, matematikos pamoka baigsis nė neprasidėjusi. Ir tikrai, toliau jie nepasistūmėjo, nes dabar jau Albertas pareiškė norą sėdėti kairiajam krašte.

– Tada teks mums visiems atsistoti, – tarė Beata. – Nežinau, kam to reikia, bet jeigu jis taip jau labai nori... Eik šen, Cecilija!

Ir kai jie vėl susėdo, vaizdas buvo toks:

A B C

Žinoma, neilgai jiems teko taip sėdėti.

– Ne, šalia Cecilijos nebeištversiu nė minutės, – pareiškė Beata. Jos užgaidoms nebuvo galo, bet kadangi ji vis nesiliovė, Albertui ir Cecilijai teko nusileisti. Robertas užrašė:

C A B

– Gal jau pakaks, – tarė jis.

– Tu taip manai? – paklausė Skaičių kipšas. – Juk ta trijulė dar ne visas galimybes išmėgino. Kaip atrodytų, jeigu jūs susėstumėt šitaip: Albertas kairėj, Cecilija per vidurį, o Beata iš dešinės?

– Nė už ką, – sušuko Beata.

– Gana tau maivytis, Beata, – perspėjo senukas.

Labai nenoromis visi trys pakilo ir susėdo tokia tvarka:

ACB

– Ar nieko nepastebi, Robertai? Aš *tau* sakau! Anie trys čia tikriausiai nieko neįžvelgs.

Robertas metė žvilgsnį į lentelę:

AB	CBA
BA	BCA
	BAC
	ABC
	CAB
	ACB

– Sakyčiau, kad jau išbandėm visas galimybes, – atsakė jis.

– Ir man taip atrodo, – pritarė Skaičių kipšas. – Bet juk negalimas daiktas, kad jūs klasėj tik keturiese. Tikriausiai dar kai ko trūksta.

Sulig tais žodžiais pro duris įsiveržė Danielė ir vos kvapą atgaudama sušuko:

– Kas čia darosi? Kurgi daktaras Oželis? O jūs kas toks būsit? – kreipėsi ji į Skaičių kipšą.

– Aš tik laikinai pavaduoju daktarą Oželį, – atsakė senolis. – Jis sakosi nebegalėjęs ištverti. Labai jau nerami jūsų klasė.

– Kas tiesa, tai tiesa, – patvirtino Danielė. – Tik pažiūrėkit, kaip jie susėdę! Nuo kada ši vieta yra *tavo,* Cecilija? Čia sėdžiu aš!

– Tada tu, Daniele, ir pasiūlyk, kaip visiems susėsti, – tarė Skaičių kipšas.

– Geriausia būtų laikytis abėcėlės tvarkos, – atsakė ji. – A kaip Albertas, B kaip Beata, C kaip Cecilija ir taip toliau. Baigtųsi visi ginčai.

– Kaip nori. Nagi pabandykim.

Robertas parašė lentoje:

Bet paaiškėjo, kad nė vienas nenori sėdėti taip, kaip siūlo Danielė. Klasėje kilo baisus sąmyšis. Ypač siautėjo Beata. Ji kandžiojosi ir draskėsi, jei tik kuris nenorėjo užleisti savo vietos. Mokiniai tik stumdėsi ir jėga brovėsi vienas per kitą. Tačiau netrukus ginčai virto azartišku žaidimu, į kurį įsitraukė visi keturi. Jie ėmė tyčia kaitaliotis vietomis, ir kuo toliau, tuo greičiau; Robertas vos spėjo užrašinėti. Pagaliau ketvertas maištautojų išbandė vi-

sus galimus susėdimo variantus, ir lentoje galėjai juos perskaityti:

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

Gerai dar, kad šiandien ne visi susirinko, pamanė Robertas, nes ir galo nebūtų.

Bet štai atsivėrė durys ir įbildėjo Edvardas, Felicija, Gustavas, Halina, Ivanas, Janina ir Karolis.

– Ne, – šaukė Robertas, – nereikia, gana! Nebesėskit! Arba aš išprotėsiu.

– Gerai, – sutiko Skaičių kipšas, – tebūnie taip. Visi galit eiti namo. Šiandien daugiau pamokų nebus.

– O aš? – sunerimo Robertas.

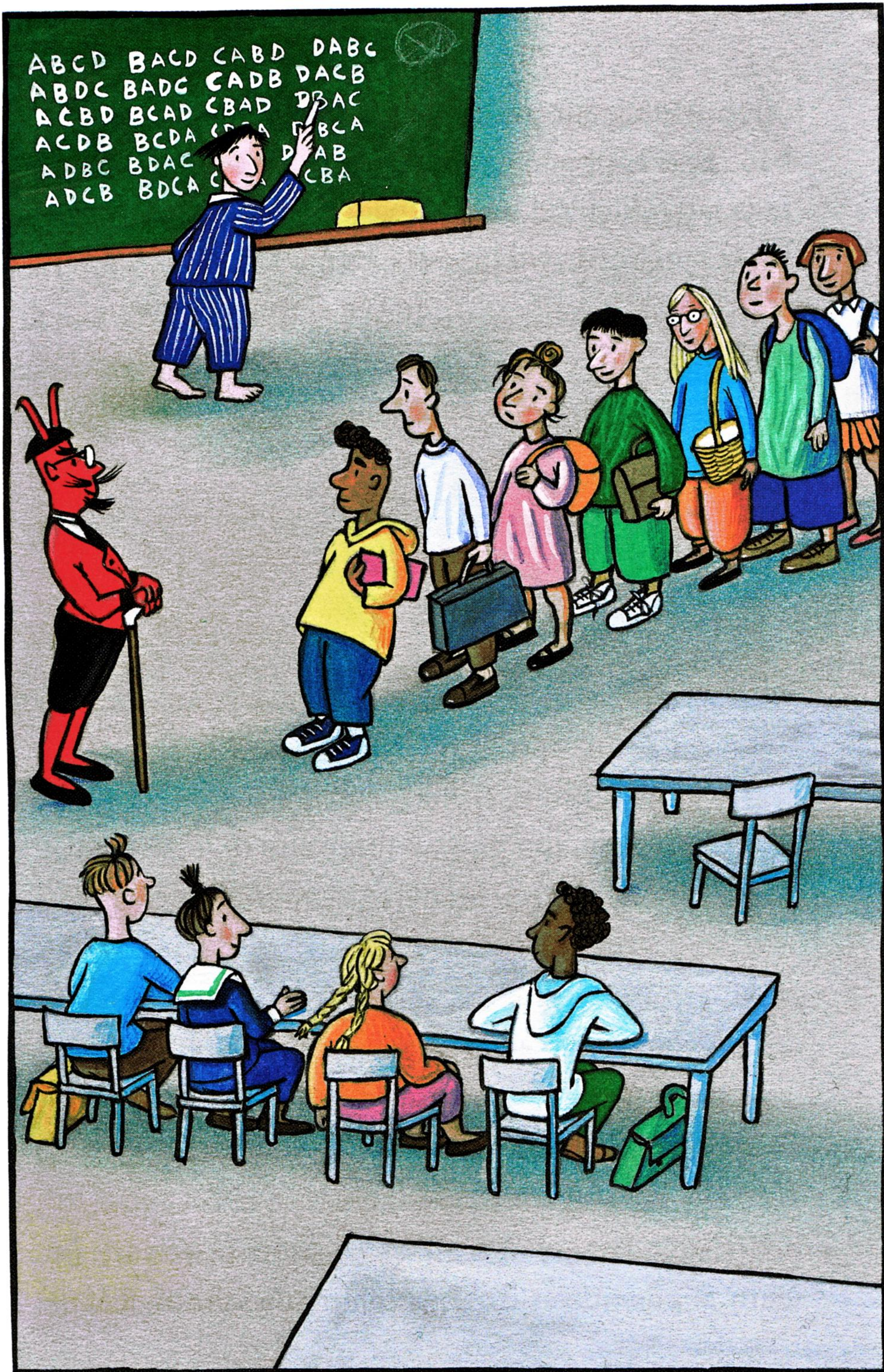
– Tu gali dar valandėlę pasilikti.

Jo draugai buvo jau lauke.

Robertas vis dar nenuleido akių nuo lentos.

– Na, ką tu pasakysi? – paklausė Skaičių kipšas.

– Net nežinau. Aišku tik viena: kuo toliau, tuo daugiau. Vis daugiau skirtingų galimybių susėsti. Kol tik



– Ne, – šaukė Robertas, – nereikia, gana! Nebesėskit! Arba aš išprotėsiu.
– Gerai, – sutiko Skaičių kipšas, – tebūnie taip. Visi galit eiti namo.

du mokiniai, dar paprasta. Du mokiniai, dvi galimybės. Trys mokiniai, šešios galimybės. O kai keturi, tada jau – kiek čia bus? – dvidešimt keturios.

– O jei būtų viso labo tik vienas?

– Ką čia ir kalbėti! Žinoma, būtų tik viena galimybė.

– Dabar pabandyk sudauginti, – liepė senolis.

MOKINIŲ	GALIMYBIŲ
1	1
2	$1 \times 2 = 2$
3	$1 \times 2 \times 3 = 6$
4	$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

– Mat kaip, – tarė Robertas. – Įdomu.

– Kai žaidimo dalyvių daug, toks užrašas tampa griozdiškas. Bet galima ir trumpiau. Parašomas dalyvių skaičius ir pridedamas šauktukas:

$$4! = 24$$

O tariama taip: keturi bum!

– Jeigu mes nebūtume išleidę į namus Edvardo ir Felicijos, Gustavo ir Halinos, Ivano, Janinos ir Karolio, kas, tavo manymu, būtų įvykę?

– Didžiulis sąmyšis, – atsakė Skaičių kipšas. – Jie būtų iš pasiutimo išbandę visus susėdimo varian-

tus, ir, žinok, tai būtų trukę velnioniškai ilgai. Kartu su Albertu, Beata, Cecilija ir Daniele būtų susidarę vienuolika žmonių, vadinasi, jie būtų turėję vienuolika bum! skirtingų galimybių susėsti. Kaip tau rodosi, kiek – bent maždaug – tai būtų?

– Mintinai joks žmogus to nesuskaičiuotų. Bet į mokyklą aš visuomet atsinešu kišeninį skaičiuotuvą. Žinoma, paslapčia, nes daktaras Oželis įsiunta pamatęs, kad kas nors tuo daikčiuku naudojasi.

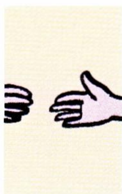
Ir Robertas ėmė spaudyti klavišus:

1×2×3×4×5×6×7×8×9×10×11=

– Vienuolika bum!, – pranešė jis, – yra lygiai 39 916 800. Kone keturiasdešimt milijonų!

– Taigi matai, Robertai, užsimoję visa tai išbandyti būtume turėję sėdėti čia dar aštuoniasdešimt metų. Tavo klasės draugams seniai būtų prireikę invalido krėslų, o mes būtume turėję samdyti vienuolika medicinos seserų stumdyti jiems iš vienos vietos į kitą. Bet truputis matematikos, ir darbas eina sparčiau. Dabar dar vienas dalykas. Žvilgtelėk pro langą, ar tavo klasės draugai tebėra čia.

– Jie, man rodos, spėjo nusipirkti ledų ir dabar jau skirstosi.



– Kaip manai, ar jie spaudžia vienas kitam ranką atsisveikindami?

– Tikrai ne. Daugių daugiausia tarsteli „Iki“ arba „Lik sveikas“.

– Gaila, – atsiduso Skaičių kipšas. – Man įdomu, kas būtų, jei kiekvienas paspaustų visiems ranką.

– Liaukis! Tai, ko gero, truktų visą amžinybę. Tikriausiai tų rankų paspaudimų būtų velnioniškai daug. Spėju, kad vienuolika bum!, jei skirstosi vienuolika žmonių.

– Klysti, – įspėjo jį senolis.

Tikrai, ėmė svarstyti Robertas, jei atsisveikina dviese, pakanka vieno rankų paspaudimo. O jei trise...

– Verčiau rašyk lentoj.

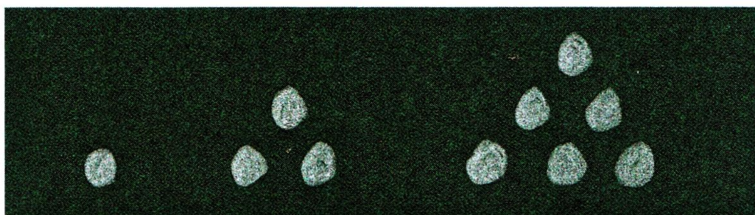
Ir Robertas parašė:

MOKINIŲ	RANKŲ PASPAUDIMŲ
A	–
AB	AB
ABC	AB AC BC
ABCD	AB AC AD BC BD CD

– Taigi du žmonės – vienas paspaudimas, trys žmonės – trys paspaudimai, o kai žmonių keturi, tai rankų paspaudimų jau šeši.

– 1, 3, 6... Pažįstami skaičiai, ar ne?

Robertas niekaip neprisiminė. Tada Skaičių kipšas nupiešė lentoj keletą riebių taškų:



– Kokosai, – sušuko Robertas. – Trikampiai skaičiai!

– O kaip jie susidaro?

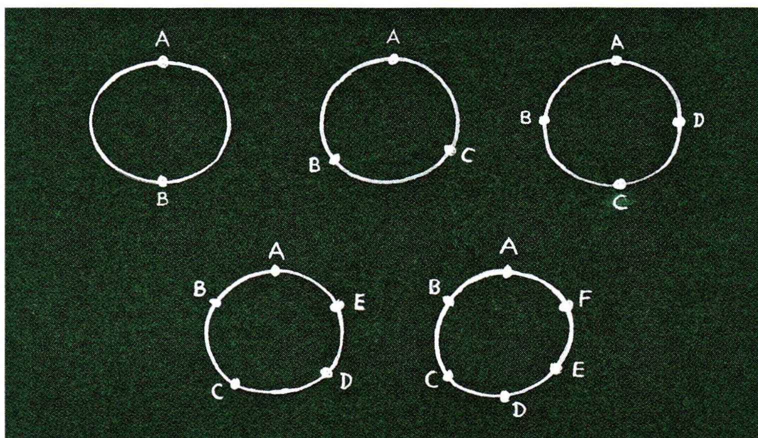
– Taigi žinai:

1 + 2 = 3
3 + 3 = 6
6 + 4 = 10
10 + 5 = 15
15 + 6 = 21
21 + 7 = 28
28 + 8 = 36
36 + 9 = 45
45 + 10 =

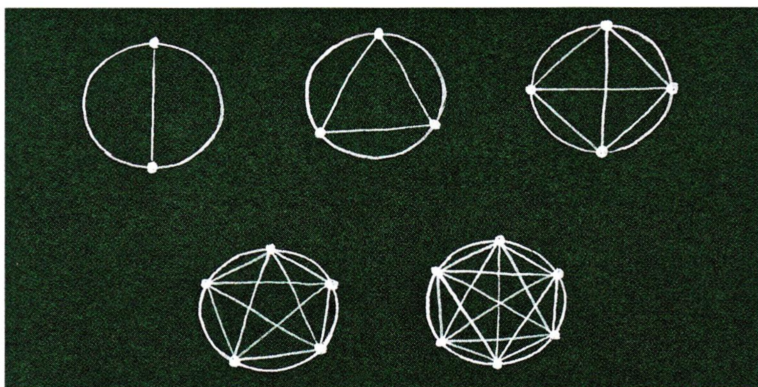
– Išeina 55 rankų paspaudimai.

– Tai dar ne taip baisu, – sutiko Robertas.

– Jei nenori tiek skaičiuoti, gali pasielgti ir kitaip. Nubrėžk lentoj keletą apskritimų, štai taip:



O dabar kiekviename apskritime pažymėk vis viena raide daugiau: A reikš Albertą, B – Beatą, C – Ceciliją ir taip toliau. Paskui kiekvieną raidę sujunk su visomis kitomis:



Atrodo neblogai, ar ne? Kiekvienas brūkšnys reiškia vieną rankų paspaudimą. Gali suskaičiuoti.

– 1, 3, 6, 10, 15... Kaip ir turi būti, – tarė Robertas. – Aš tik vieno dalyko nesuprantu. Ar gali man išduoti paslaptį, kodėl tau visuomet viskas sueina?

– Toks jau šėtoniškas daiktas ta matematika. Visada viskas atitinka. Na, gal tikriau bus pasakius: beveik viskas. Nes pirminiai skaičiai, kaip žinai, turi tam tikrų užgaidų. Ir šiaip turi būti velnioniškai budrus, kad neįkliūtum į žabangas. Bet apskritai matematikoje viskas iš tiesų labai tvarkinga. Kaip tik todėl kai kurie žmonės jos taip nemėgsta. Aš, pavyzdžiui, negaliu pakęsti suskretėlių ir apsileidėlių, o anie lygiai taip pat bjaurisi skaičiais. Beje, tik dirstelėk pro langą. Juk jūsų mokyklos kiemas – tikra kiaulidė!

Kur jau čia paprieštarausi: iš tiesų visuose kiemo kampuose mėtėsi tuščios kokakolos skardinės, sudraskyti komiksai ir kitokie popiergaliai.

– Jei trejetas jūsiškių paimtų šluotą į rankas, po pusvalandžio kiemas atrodytų visai kitaip.

– O kas jau bus tie trys?

– Nagi kad ir Albertas, Beata ir Cecilija. Arba Danielė, Edvardas ir Felicija. Be to, juk yra dar Gustavas, Halina, Ivanas, Janina ir Karolis.

– Bet juk sakei, kad pakanka trijų.

– Taip, – pripažino Skaičių kipšas, – tačiau kurį trejetą pasirinkti?

– Galima juos grupuoti kaip tik nori, – tarė Robertas.

– Žinoma. Bet jei ne visus turim? Jei atėjo tik trys – Albertas, Beata ir Cecilija?

– Tada jiems ir teks darbuotis.

– Gerai, taip ir rašyk!

Robertas parašė:

ABC

– O jei dar prisidės Danielė, kas tada? Turėsim jau keletą galimybių.

Kiek pamąstęs, Robertas jas ir surašė:

ABC ABD ACD BCD

– Keturios galimybės, – pareiškė jis.

– Dabar įsivaizduok, kad atsitiktinai pro šalį eina dar ir Edvardas. Kodėl jam neprisidėjus? Dabar turim jau penkis kandidatus. Nagi pabandyk.

Bet Robertas jau pavargo.

– Verčiau iš karto pasakyk, kas bus, – paprašė jis.

– Gerai. Iš trijų žmonių galima sudaryti tik vieną trijulę. Jei žmonių keturi, galim sugrupuoti juos ketveriopai, o jei penki, turim dešimt skirtingų galimybių. Aš tau jas surašysiu:

ŽMONIŲ	TRIJULIŲ									
3	ABC									
4	ABC	ABD		ACD			BCD			
5	ABC	ABD	ABE	ACD	ACE	ADE	BCD	BCE	BDE	CDE

– Šis sąrašas turi dar vieną įdomią ypatybę. Trijulių narius, kaip matai, surašiau abėcėlės tvarka. Kiek trijulių prasideda Albertu? Dešimt. Kiek – Beata? Keturios. O Cecilija trijulės pradžioje atsidūrė tik vieną sykį. Visame tame žaidime kaskart išlenda tie patys skaičiai:

1, 4, 10...

Dabar atspėk, kas būtų toliau? Jei, tarkim, prisidėtų dar daugiau mokinių, pavyzdžiui, Felicija, Gustavas, Halina ir taip toliau? Kiek skirtingų trijulių galėtume sudaryti?

– Neįsivaizduoju, – patraukė pečiais Robertas.

– Galgi dar prisimeni, kaip andai skaičiavom rankų paspaudimus? Jei kiekvienas su kiekvienu atsisveikintų?

– Tai visai lengva. Reikia tik žinoti trikampius skaičius:

1, 3, 6, 10, 15, 21...

Bet mūsų šlavėjams tai netinka, nes jie dirba po tris.

– Netinka. Bet kiek bus sudėjus pirmuosius du trikampius skaičius?

– Keturi.

– O pridėjus iš eilės dar vieną?

– Dešimt.

– Ir dar vieną?

– 10 + 10 = 20.

– Na, matai.

– Ir ką, dabar turėsiu sumuoti vis toliau, kol prieisiu iki vienuolikto? Gal juokauji?

– Nesirūpink. Galima ir be to. Be skaičiavimų, be bandymų, be ABCDEFGHIJK.

– O kaip?

– Nagi pasinaudosim senuoju geruoju skaičių trikampiu, – paaiškino senolis.

– Ir tu pieši jį čia lentoje?

– Nė nemanau. Man tai būtų per daug nuobodu. Nepamiršk, kad turiu lazdelę.

Tik bakstelėjo lazdele į lentą – ir štai jau švyti joje trikampis visu gražumu, net keturiomis spalvomis.

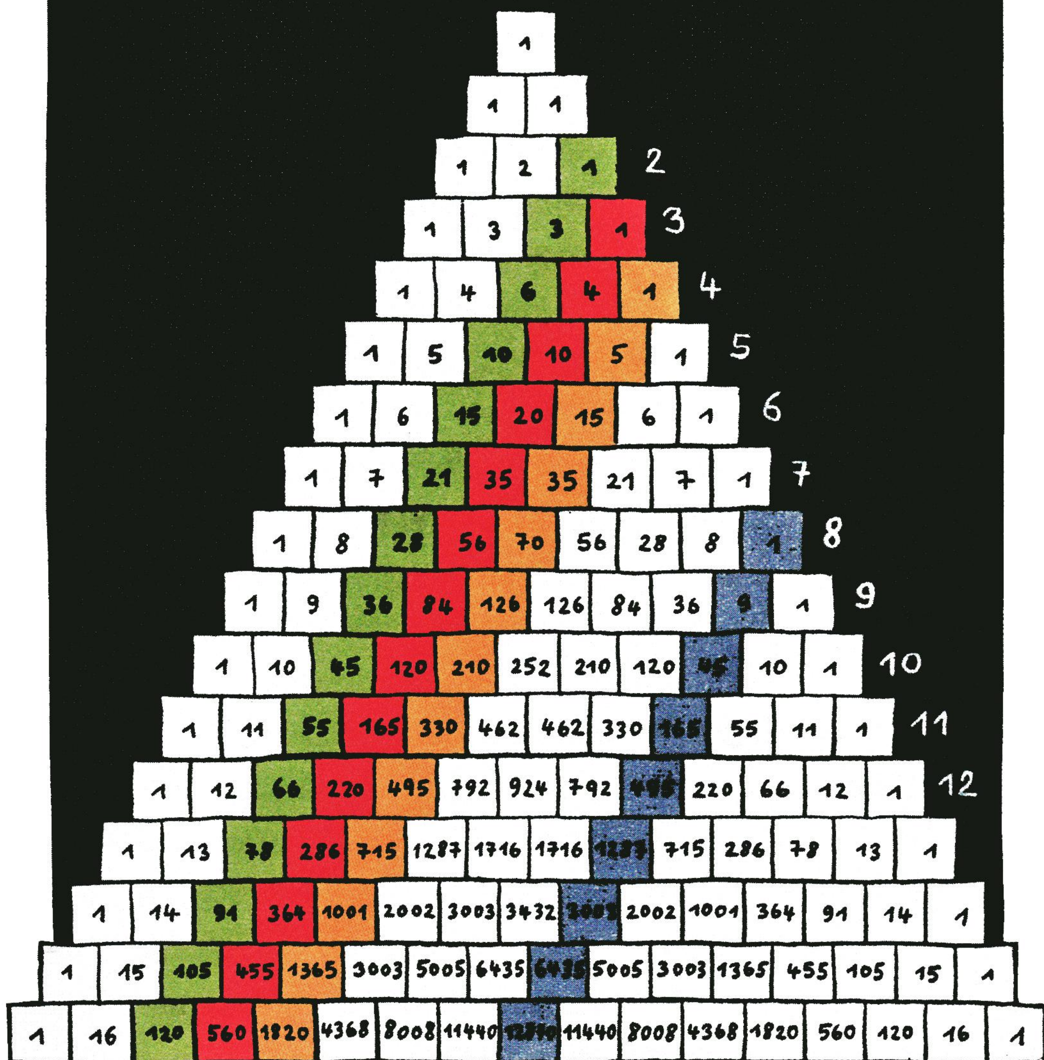
– Patogiau ir būt negali, – toliau kalbėjo senasis Skaičių kipšas. – Kiek būtų rankų paspaudimų, surašyta žaliuosiuose kubeliuose iš viršaus žemyn: jei du žmonės – vienas rankų paspaudimas, jei trys žmonės – trys paspaudimai, jei vienuolika žmonių – 55.

Mūsų šlavėjų tercetui prireiks raudonųjų kubelių. Ir vėl skaičiuojam iš viršaus žemyn. Pradedam nuo trijų žmonių: turim tik vieną galimybę. Jei gali rinktis iš keturių, turi keturis variantus, jei penkis – jau visą dešimtį. O kiek skirtingų trijulių galima sudaryti iš visų vienuolikos mokinių?

– 165, – atsakė Robertas. – Iš tiesų paprasta. Tas skaičių trikampis – ne ką prasčiau už kompiuterį. Bet kam gi reikalingi geltonieji kubeliai?

– Ak, – tarė senolis, – juk jau žinai, kad aš taip greit nenurimstu. Mes, skaičių kipšai, visada kasamės ligi pat pamatų. Ką tu darysi, jei paaiškės, kad trijų žmonių tam darbui nepakanka? Turėsi imti keturis, ar ne? Tada geltonųjų kubelių eilė tau ir parodys, kiek yra galimybių sudaryti kvartetą, pavyzdžiui, iš aštuonių žmonių.

– Septyniasdešimt, – išpyškino Robertas; jis jau puikiausiai suprato, kaip lengva trikampyje rasti atsakymą.


1
1 1
1 2 1 2
1 3 3 1 3
1 4 6 4 1 4
1 5 10 10 5 1 5
1 6 15 20 15 6 1 6
1 7 21 35 35 21 7 1 7
1 8 28 56 70 56 28 8 1 8
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1 9
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1 10
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1 11
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1 12
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1

– Teisybė, – pagyrė jį Skaičių kipšas. – O ką jau kalbėti apie mėlynuosius kubelius.

– Tikriausiai jie tinka aštuonių žmonių grupėms. Jei turiu tik aštuonis kandidatus, nėra ko ilgai svarstyti: galimybė sudaryti komandą tik viena. O jei galiu rinktis aštuonis iš dešimties, tada skirtingos sudėties grupių bus jau 45. Na ir taip toliau.

– Aha, supratai.

– Man tik įdomu, kaip dabar atrodo kiemas.

Žvilgt pro langą – ogi ten taip švaru ir tvarkinga, kaip dar niekada nėra buvę.

– Norėčiau žinoti, kas buvo tie trys šlavėjai.

– Šiaip ar taip, tavęs tarp jų nebuvo, – pasišaipė Skaičių kipšas.

– Kaipgi būčiau galėjęs šluoti mokyklos kiemą, jei kiaurą naktį vargau su skaičiais ir kubeliais?

– Vis dėlto pripažink, – tarė senolis, – kad tau buvo įdomu.

– O toliau? Ar greitai vėl susitiksim?

– Aš dabar atostogausiu, – tarė Skaičių kipšas. – Bet tu galėsi tuo tarpu pasišnekėti su daktaru Oželiu.

Nelabai viliojo Robertą tokia galimybė, bet kas jam beliko? Juk rytojaus rytą – vėl mokyklon.

Įeina jis į klasę ir mato: ir Albertas su Beata, ir visi kiti jau sėdi savo vietose. Nė vienas neužsimanė keistis vieta su kitais.

– Anava ir genialusis mūsų matematikas, – šūktelėjo Cecilija.

– Robertėlis mokosi net ir miegodamas, – įgėlė Beata.

– Manot, jam tai padės? – suabejojo Danielė.

– Vargu bau, – atsiliepė Karolis. – Vis tiek daktaras Oželis negali jo pakęsti.

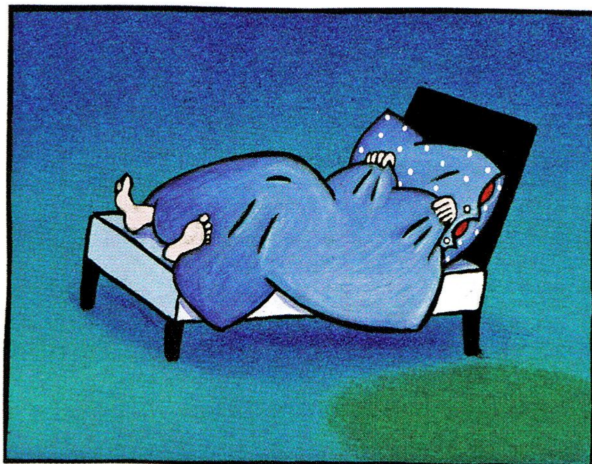
– O aš – to Oželio, – patikino Robertas. – Nenorėčiau jo nei regėti, nei girdėti.

Kol dr. Oželis dar neįžengė klasėn, Robertas vogčiom žvilgtelėjo pro langą.

Mokyklos kiemas toks kaip visada, pagalvojo jis. Tikras šiukšlynas! Štai ir pasitikėk sapnais. Kas kita skaičiai: jais visada gali kliautis.

Ir tada – kaipgi kitaip! – įėjo dr. Oželis, nešinas portfeliu, pilnu riestainių.

Devinta naktis



Robertas susapnavo, kad sapnuoja. Tai jam – ne naujiena. Kaskart, kai sapne atsitikdavo kas nors nemalonaus, pavyzdžiui, stovi viena koja ant slidaus akmens vidury sraunios upės ir negali žengti nei pirmyn, nei atgal, jis skubiai pagalvodavo: bjaurus reikalas, bet juk tai tik sapnas.

Tačiau paskui jis susirgo gripu, karščiavo ir turėjo ištisą dieną gulėti lovoj. Tada jam toji gudrybė mažai tegelbėjo, nes Robertas gerai žinojo: patys blogiausi sapnai esti karščiuojant. Jis prisiminė, kaip kitados sirgdamas sapnavo ugnikalnio išsiveržimą. Ugnimi spjaudantis kalnas išsviedė jį aukštai į dangų, ir jis jau buvo bekrintąs žemyn, lėtai, kankinamai lėtai, tiesiai į kraterį... Nesinorėjo nė prisiminti.

Todėl jis stengėsi neužmigti, nors mama jam nuolat kartojo:

– Geriausia tau būtų visą tą gripą išmiegoti. Neskaityk taip daug! Tai nesveika.

Perskaitęs bene dvylika komiksų, jis pasijuto toks pavargęs, kad akys pačios užsimerkė.

Ir ką gi jis susapnavo? Labai keistą sapną. Neva jis serga gripu ir guli lovoj, o šalia jo, ant lovos krašto, sėdi Skaičių kipšas.

Antai ant naktinio staliuko stovi vandens stiklinė, pagalvojo jis. Mane krečia šaltis, aš turiu temperatūros. Turbūt visai nebuvau užmigęs.

– Tikrai? – suabejojo senolis. – O aš? Ar tu mane tik sapnuoji, ar čia tikrai aš?

– Nežinau, – atsiduso Robertas.

– Pagaliau ar ne vis tiek? Aš tik norėjau tave aplankyti. Juk ligonis turi gulėti namie, jam nedera bastytis po dykumą arba skaičiuoti kiškius bulvienoje. Tai aš ir pamaniau: pavakarokim ramiai, be didelių fokusų. O kad tau nebūtų nuobodu, pasikviečiau keletą skaičių. Tu gi žinai, be skaičių aš nė iš vietos. Bet nesirūpink, jie visai nekenksmingi.

– Tu visada taip kalbi, – sumurmėjo Robertas.

Kažkas pabeldė į duris, ir Skaičių kipšas šūktelėjo: „Prašom!“ Skaičiai nieko nelaukę sugužėjo vidun; jų buvo tiek daug, kad bematant prisipildė visas miegamasis. Robertas nusistebėjo, kad šitiek žmonių

sutilpo tarp durų ir lovos. Skaičiai pasirodė jam panašūs į sportininkus – gal dviratininkus, gal maratono bėgikus, nes kiekvieno balti marškinėliai buvo paženklinti numeriu. Kambarys buvo nedidukas, bet kuo daugiau skaičių į jį grūdosi, tuo jis darėsi ilgesnis. Durys traukėsi vis tolyn, kol vos begalėjai jas įžiūrėti tiesaus kaip styga koridoriaus gale.

Skaičiai stoviniuodami kikeno ir plepėjo, kol Skaičių kipšas garsiai kaip koks viršila sukomandavo:

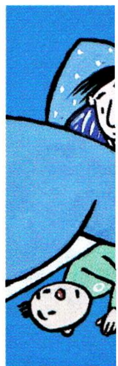
– Dėmesio! Pirmas būrys – rikiuot!

Tučtuojau skaičiai išsirikiavo palei sieną viena ilga greta: priekyje – vienetas, visi kiti – šalia.

– O kurgi nulis? – paklausė Robertas.

– Nulis – į priekį! – subliovė Skaičių kipšas.

Nulio būta po lova pasislėpusio. Dabar jis išropojo ir sumišęs vapėjo:



– Maniau, kad manęs nereikės. Aš taip prastai jaučiuosi, ko gero, būsiu pasigavęs gripą. Meldžiu duoti man ligos lapelį.

– Pasitraukt! – suriko senolis, ir nulis vėl palindo po Roberto lova.

– Kurgi ne, tas nulis vis nori išsiskirti. Jam taip lengvai neįtiksi. Bet visi kiti – ar pastebėjai, kokie klusnūs?

Skaičių kipšas patenkintas žiūrėjo į paprastuosius skaičius, išsirikiavusius viena greta:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...

– Antras būrys – rikiuot! – sukomandavo jis, ir tučtuojau pridundėjo naujų skaičių. Gerokai patrypčioję, jie pagaliau sustojo reikiama tvarka:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	...

Naujokai, vilkintys raudonais marškinėliais, stovėjo tiesiai priešais anksčiau išsirikiavusius šauktinius, ir kambarys dabar veikiau panėšėjo į be galo nutįsusią rankovę.

– Aha, – suprato Robertas. – Tai nelyginiai skaičiai.

– Taip, bet pamėgink atspėti, kiek jų yra, palyginti su tais, kurie vilki baltai ir stovi prie pat sienos.

– Taigi aišku, – tarė Robertas. – Kas antras skaičius yra nelyginis. Vadinasi, raudonųjų yra perpus mažiau nei baltųjų.

– Tai sakai, kad paprastųjų skaičių yra dusyk daugiau kaip nelyginių?

– Be abejo.

Skaičių kipšas nusijuokė, bet tas juokas nebuvo linksmas; Robertui atrodė, kad jis veikiau pašaipus.

– Turiu tave nuvilti, mielasis, – tarė senis. – Ir vienų, ir kitų yra lygiai tiek pat.

– Tai neįmanoma, – sušuko Robertas. – *Visų* skaičių negali būti lygiai tiek pat kiek *pusė* skaičių. Nesąmonė!

– Nagi pažiūrėk, tuoj aš tau įrodysiu.

Senolis atsigręžė į skaičius ir sumaurojo:

– Pirmas ir antras būrys, sudaužti rankas!

– Ko tu taip šauki, – pyktelėjo Robertas, – juk čia ne kareivinės. Ar negalėtum kalbėti su jais šiek tiek mandagiau?

Bet veltui jis purkštavo, nes dabar jau kiekvienas baltasis buvo padavęs ranką vienam iš raudonųjų ir visi skaičiai stovėjo susirikiavę poromis kaip alaviniai kareivėliai:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	…

– Matai? Kiekvieną paprastąjį skaičių nuo vieneto iki kažin kiek atitinka nelyginis skaičius: taip pat nuo vieneto ligi kažin kiek. Ar galėtum man paro-

dyti bent vieną raudoną skaičių, likusį be balto partnerio? Taigi yra be galo daug paprastųjų skaičių ir lygiai tiek pat nelyginių skaičių. Irgi be galo daug.

Robertas valandėlę pamąstė.

– Ar tai reiškia, kad jei begalybę padalysiu iš dviejų, gausiu dvi begalybes? Bet juk tada visuma būtų lygi pusei visumos!

– Taip ir yra, – patvirtino Skaičių kipšas. – Ir tai dar ne viskas.

Jis išsitraukė iš kišenės švilpuką ir sušvilpė. Kaipmat iš ilgiausio kambario gilumos atskubėjo dar viena skaičių vora, šįsyk žaliais marškinėliais. Jie trypčiojo nenustygdami, kol senasis treneris sukomandavo:

– Trečias būrys – į priekį!

Ilgai netrukę žalieji tvarkingai susirikiavo raudonųjų ir baltųjų priekyje:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	…

– Juk čia pirminiai skaičiai, – pažino Robertas. Senolis pritariamai linktelėjo ir vėl sušvilpė, tik dabar jau keturissyk iš eilės.

Ir tada Roberto kambarys virto tikru pragaru. Košmaras, ir tiek! Kas būtų galėjęs pamanyti, kad

„Prašom", – šūktelėjo Skaičių kipšas. Nieko nelaukę skaičiai sugužėjo vidun; jų buvo tiek daug, kad bematant prisipildė visas miegamasis.

viename kambaryje, net ir nutįsusiame vos ne iki Mėnulio, tilps tokia galybė skaičių! Jau ir kvėpuoti nebėra kuo. Robertui galva degte degė.

– Gana, – šaukė jis. – Nebegaliu tverti.

– Nieko baisaus, tai tik dėl gripo, – nuramino jį Skaičių kipšas. – Rytoj būsi jau sveikesnis. – Ir komandavo toliau: – Dėmesio, visi! Ketvirtas, penktas, šeštas ir septintas būrys – į priekį! Paskubėt!

Robertas vargais negalais praplėšė apsunkusius vokus ir išvydo septyneriopus skaičius, vilkinčius baltais, raudonais, žaliais, mėlynais, geltonais, juodais ir rausvais marškinėliais. Jie visi buvo susirikiavę tvarkingomis gretomis be galo ištįsusiame jo miegamajame:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	…
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	…
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	…
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	…
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384		…
1	2	6	24	120	720	5040	40320		362880		3628800		39916800		…

Kokiais numeriais pažymėti rausvi marškinėliai, kuriais vilki toliausiai stovintieji, vaikinas nebegalėjo įžiūrėti: ten buvo tiek skaitmenų, kad jie vos tilpo per visą krūtinę.

– Tie skaičiai didėja nežmoniškai greitai, – skundėsi Robertas. – Aš su jais nebespėju.

– Bum!, – šūktelėjo senolis. – Tai skaičiai su šauktuku:

$$3! = 1 \times 2 \times 3$$
$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$$

ir taip toliau. Jie auga sparčiau, nei galėtum pamanyti. Na, o kaip visi kiti? Ar pažįsti juos?

– Apie raudonuosius jau kalbėjom, tai nelyginiai skaičiai, o žalieji – pirminiai. Mėlynieji – nežinau, bet ir jie man kažką primena.

– Ar tik ne kiškius?

– Taip, tikrai. Tai Bonačio skaičiai. O geltonieji tikriausiai – trikampiai.

– Visai neprastai, mielasis Robertai. Net ir gripuodamas darai pažangą, nepamiršti, kad esi burtininko mokinys.

– Na, o juodieji – tai paprasčiausiai pašokdintieji skaičiai: 2^2, 2^3, 2^4 ir taip toliau.

– Ir kiekvienos rūšies skaičių yra po lygiai, – pridūrė Skaičių kipšas.

– Be galo daug, – atsiduso Robertas. – Stačiai baisu! Minių minios.

– Būriai nuo pirmo iki septinto, išsiskirstyt! – riktelėjo senasis burtininkas.

Ir vėl subruzdo visų rūšių skaičiai, brūkšėjo ir grūdosi, trepsėjo ir stumdėsi. Pagaliau jie visi išgarmėjo ir įsivyravo palaiminga ramybė; Roberto kambarys vėl tapo mažas ir tuščias, toks kaip pirma.

– Dabar man tetrūksta stiklinės vandens ir aspirino tabletės, – tarė Robertas.

– Ir gerai pailsėk, kad rytoj būtum sveikas kaip ridikas, – tarė Skaičių kipšas ir net pats jį apklostė. – Tau reikia tik atidžiai žiūrėti, – pridūrė jis. – Visa kita parašysiu tau ant lubų.

– Ką gi dar?

– Žinai, – kalbėjo senis, vėl ėmęs mosikuoti savo lazdele, – mes išprašėm būrius, nes jie buvo per daug triukšmingi ir tik grindis pritrypė. Dabar mums beliko eilutės.

– Eilutės? Kokios dar eilutės?

– Matai, – ėmė aiškinti Skaičių kipšas, – ne visada skaičiai tik ramiai stovi vienas šalia kito kaip

– Dabar man tetrūksta stiklinės vandens ir aspirino tabletės, – tarė Robertas. Bet senis jau vėl ėmė mosikuoti savo lazdele.

kokie alaviniai kareivėliai. O kas būna, kai jie susijungia? Pavyzdžiui, jeigu juos sudėtume?

– Ką aš žinau, – sudejavo Robertas.

Tačiau senis jau spėjo surašyti lubose pirmą eilutę.

– Argi tu pats nesakei, kad man reikia ilsėtis? – priekaištingai tarė Robertas.

– Tik jau neapsimesk. Tau tereikia perskaityti, kas ten parašyta:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \ldots =$$

– Juk tai trupmenos, – pasipiktino Robertas. – Tegu jas velniai!

– Atsiprašau, betgi jos visai paprastos. Gal, sakysi, ne?

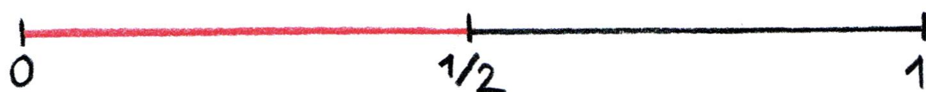
– Viena antroji, – skaitė Robertas, – plius viena ketvirtoji, plius viena aštuntoji, plius viena šešioliktoji ir taip toliau. Viršuj – visada vienetas, o apačioj – pašokdintieji skaičiai iš dvejetų gretos, visi tie juodmarškiniai. 2, 4, 8, 16... Žinome, kas ten toliau.

– Taigi, bet ką gautume sudėję visas tas trupmenas?

– Nežinau, – atšovė Robertas. – Kadangi ta eilutė niekada nesibaigia, tai tikriausiai suma būtų

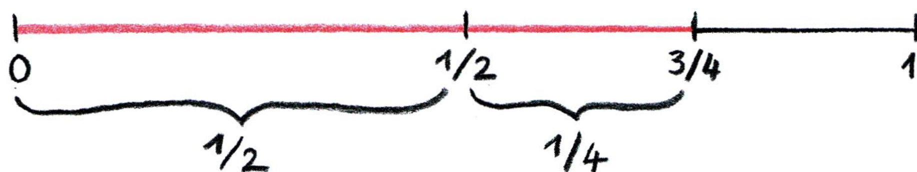
be galo didelė. Bet, kita vertus, ¼ yra mažiau kaip ½, ⅛ yra mažiau kaip ¼ ir taip toliau, vadinasi, pridėti tenka kaskart vis mažiau.

Trupmeniniai skaičiai dingo nuo lubų. Robertas pažvelgė aukštyn ir pamatė tik ilgą brūkšnį:

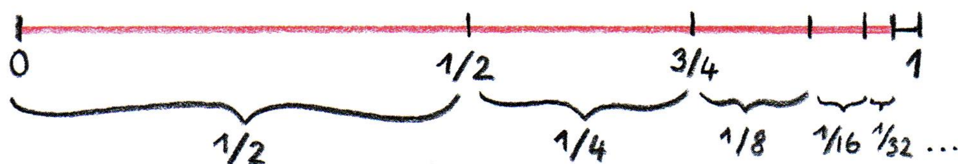


– Aha, – tarė jis po valandėlės. – Rodos, jau būsiu supratęs. Pradedu nuo ½. Paskui pridedu pusę tos ½, arba ¼.

Ir aure – tai, ką jis kalbėjo, jau šviečia lubose juodu ant balto:



– Nagi darau taip ir toliau. Kaskart pridedu pusę to, kas pridėta anksčiau. Pusė ¼ yra ⅛, pusė ⅛ yra 1/16 ir taip toliau. Atkarpos, kurias pridedu, kaskart vis trumpesnės, kol tampa tokios mažos, kad jau nė nebeįžiūriu, panašiai kaip tada, kai dalijom kramtomąją gumą. Taip galiu daryti iki pažaliavimo. *Beveik* prisikapstysiu ligi vieneto, bet galutinai jo taip ir nepasieksiu.



– Pasiektum. Jei tęstum iki begalybės.

– Neturiu jokio noro. Nepamiršk, kad aš guliu ir sergu gripu.

– Užtat, – tarė senis, – dabar žinosi, kas toliau ir kas iš to išeina. Nes *tu* gali ir pavargti, bet skaičiai nepavargsta niekada.

Lubose dingo brūkšnys, jį pakeitė štai tokia eilutė:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \cdots = 1$$

– Nuostabu! – sušuko Skaičių kipšas. – Puiku! Na, o dabar toliau!

– Aš pavargau. Noriu miego!

– Nesuprantu, ko gi tu dar nori? – nusistebėjo senis. – Juk tu ir miegi. Ir sapnuoji mane, o sapnuoti gali tik miegodamas.

Kas tiesa, tai tiesa, pagalvojo Robertas, nors ir jautė, kad jo smegenys visai aptingo.

– Tiek to, – tarė jis, – tebūnie dar *vienas* kvailas tavo sumanymas, bet paskui jau tikrai palik mane ramybėj.

Skaičių kipšas kilstelėjo lazdelę ir spragtelėjo pirštais. Ant lubų vėl išsirikiavo skaičiai:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots =$$

– Lygiai tas pat, kas jau buvo, – nusivylė Robertas. – Ir šią eilutę galiu tęsti kiek norėdamas. Kiekvienas naujas skaičius mažesnis už pirmesnįjį. Sudėjus tikriausiai taip pat išeitų vienetas.

– Taip manai? Tai gal kiek pasigilinkim į tą dalyką. Imkim kad ir pirmuosius du skaičius.

Dabar lubose beliko pirmieji du eilutės nariai:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

– Kiek bus?

– Ką aš žinau, – sumurmėjo Robertas.

– Neapsimesk kvailiu, – nusišaipė Skaičių kipšas. – Kas daugiau: pusė ar ketvirtadalis?

– Žinoma, pusė, – pyktelėjo Robertas. – Bene laikai mane puspročiu?

– O ne, mielasis. Tik dar pasakyk man, kas daugiau: trečdalis ar ketvirtadalis?

– Žinoma, trečdalis.

– Na matai. Turim dvi trupmenas, kurių kiekviena didesnė už ketvirtadalį, o kam lygūs du ketvirtadaliai?

– Kvailas klausimas! Du ketvirtadaliai lygu pusei.

– Dabar matai?

Taigi

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ yra daugiau nei } \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

O jei dabar paimsim tolesnius keturis eilutės narius ir juos sudėsim, tai vėl išeis daugiau kaip pusė:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

– Man tai per daug sudėtinga, – burbtelėjo Robertas.

– Niekai! – sušuko Skaičių kipšas. – Kas daugiau: viena ketvirtoji ar viena aštuntoji?

– Viena ketvirtoji.

– O kas daugiau: viena penktoji ar viena aštuntoji?

– Viena penktoji.

– Teisybė. Taip pat ir viena šeštoji, ir viena septintoji. Iš tų keturių trupmenų

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$$

kiekviena atskirai yra didesnė už vieną aštuntąją. O kam lygu keturios aštuntosios?

Robertas nenorom atsakė:

– Keturios aštuntosios lygu ½.

– Nuostabu! Taigi dabar turime:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{\text{daugiau kaip } 1/2} + \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{\text{daugiau kaip } 1/2} + \underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots\frac{1}{15}}_{\text{daugiau kaip } 1/2} + \frac{1}{16} \cdot$$

Taip eis ir toliau. Iki begalybės. Taigi matai, jau pirmieji šeši tos eilutės nariai sudėti krūvon viršija vienetą. Galėtume tą žaidimą tęsti ir toliau, kiek tik panorėję.

– Nereikia, aš jau nenoriu, – tarė Robertas.

– O *jeigu* tęstume toliau – tik neišsigąsk, mes to nedarysim, – kur nueitume?

– Turbūt iki begalybės, – atsakė Robertas. – Juk tai tikra velniava!

– Tik ilgokai truktų, – perspėjo Skaičių kipšas. – Norėdami pasiekti pirmą tūkstantį, skaičiuotume, mano manymu, iki pasaulio pabaigos, net jei dirbtume neįtikimai sparčiai. Taip lėtai didėja tos eilutės skaičių suma.

– Tada geriau nebeskaičiuokim, – paprašė Robertas.

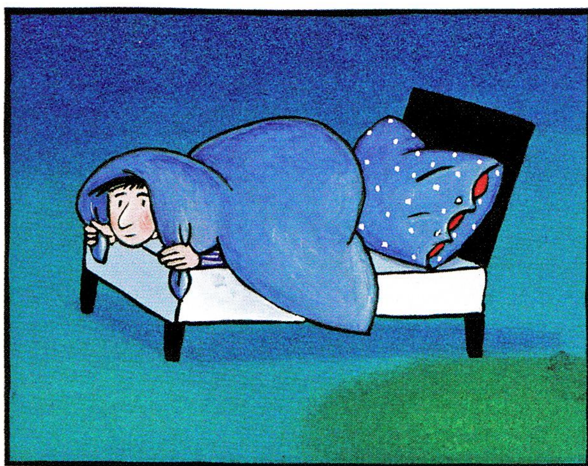
– Nebeskaičiuokim.

Pamažu išblėso užrašai lubose, tylutėliai dingo senasis burtininkas, nepastebimai slinko laikas. Robertas pabudo, kai saulutė nosį pakuteno. Mama palietė jam kaktą ir tarė:

– Ačiū Dievui, karštis atslūgo!

O ligonis jau ir nebeprisiminė, kaip lengvai galėjo nučiuožti nuo vieneto iki begalybės ir kaip ilgai tai būtų trukę.

Dešimta naktis



Robertas sėdi apsnigtame lauke ant kuprinės. Šaltis skverbiasi ligi kaulų smegenų, o snigti vis nesiliauja. Kiek akis užmato – niekur nei žiburio, nei namo, nei gyvos dvasios. Tikra arktinė pūga! Ir jau temsta. Jeigu taip eis ir toliau, tada sveikas dingęs! Jo pirštai jau visai sustirę. Ir jokios žinios, kur jis atsidūrė. Ar tik ne Šiaurės ašigalyje?

Pamėlęs nuo šalčio Robertas bando atšilti daužydamas liemenį rankomis. Negi taip ir lauksi, kol sustirsi į ragą! Bet kas čia dabar: šalimais dar vienas Robertas, patogiai įsitaisęs minkštame fotelyje, žiūri, kaip dreba jo antrininkas. Vadinasi, galima sapnuoti ir save patį, pagalvojo jis.

Tuo tarpu snaigės krito vis didesnės, dribo ant veido tam antrajam, šąlančiam Robertui, o tikrasis Robertas, sėdintis šiltame krėsle, stebėjosi, kad kiekviena snaigė vis kitokia. Dviejų vienodų nepasitaiko. Kone visi tie balti minkšti dribsniai – arba

šešiakampiai, arba turi šešis spindulius. Geriau įsižiūrėjęs matai, kad jų raštas kartojasi: šešiakampės žvaigždutės šešiakampėje žvaigždėje, spinduliai, išsišakoję vis mažesniais spindulėliais, dantukai, iš kurių dygsta kiti dantukai.

Tik staiga kažkas palietė jam petį ir prabilo pažįstamu balsu:

– Argi ne nuostabios snaigės?

Pasirodo, už Roberto sėdėjo Skaičių kipšas.

– Kur aš? – paklausė Robertas.

– Luktelk, tuoj įjungsiu šviesą, – atsakė senolis.

Ūmai tapo akinamai šviesu ir Robertas apsižiūrėjo besėdįs kine, nedidelėj dailioj salėj; minkšti raudoni krėslai sustatyti dviem eilėm.

Šešiakampės žvaigždutės šešiakampėje žvaigždėje, spinduliai, išsišakoję vis mažesniais spindulėliais, – argi ne nuostabios tos snaigės?

– Užsakytinis seansas, – tarė Skaičių kipšas. – Specialiai tau!

– O aš jau maniau, kad sušalsiu, – pasiguodė Robertas.

– Tai buvo tik filmas. Žiūrėk, aš tau kai ką atnešiau.

Šįsyk tai nebuvo kišeninis skaičiuotuvas. Nei žalias, nei gauruotas, nei gremėzdiškas kaip sofa; tas daiktas buvo pilkšvai sidabriškas, su mažu atvožiamu ekranu.

– Kompiuteris, – pažino Robertas.

– Taigi, – atsakė senolis. – Tokia lyg ir užrašų knygutė. Visa, ką tu joje išspausdinsi, tučtuojau pasirodys priekyje ant sienos. Gali ir pele piešti tiesiai kino ekrane. Galim pradėti, jei nori.

– Tik jau be pūgos, be sniego! Verčiau kiek paskaičiuoti, nei sušalti Šiaurės ašigalyje.

– Ar nesurinktum kelių Bonačio skaičių?

– Ir vėl tas tavo Bonačis! – pyktelėjo Robertas. – Kuo jis tau taip ir įtiko!

Bet vis dėlto paspaudinėjo klavišus, ir kino ekrane nušvito Bonačio skaičių seka:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 …

– Dabar pamėgink juos paporiui dalyti, – liepė senasis burtininkas. – Kaskart du gretimus. Didesnį iš mažesnio.

– Gerai, – sutiko Robertas ir ėmė spaudinėti, vis smalsiai žiūrėdamas į didįjį kino ekraną.

1 : 1 = 1
2 : 1 = 2
3 : 2 = 1,5
5 : 3 = 1,666666666 …
8 : 5 = 1,6
13 : 8 = 1,625
21 : 13 = 1,615384615 …
34 : 21 = 1,619047619 …
55 : 34 = 1,617647059 …
89 : 55 = 1,618181818 …

– Kad tave kur! – šūktelėjo Robertas. – Ir vėl tokie skaičiai be pabaigos. Aštuonioliktukai, gaudantys savo uodegą. O kai kurie kiti atrodo išvis galvą pametę.

– Taip, bet jie dar kai kuo ypatingi, – užsiminė kipšas. Robertas pažiūrėjo, pamąstė ir tarė:

– Visi tie skaičiai straksi aukštyn ir žemyn. Antras didesnis už pirmą, trečias mažesnis už antrą, ketvirtas vėl truputį didesnis ir taip toliau. Vis aukštyn ir žemyn. Bet kuo toliau, tuo mažesni jų šuoliai.

– Tikra tiesa. Kuo didesnius Bonačio skaičius imsi, tuo arčiau jie straksės apie tam tikrą vidutinį skaičių, būtent apie

1,618 033 989...

Bet tai dar ne galas, nes šitaip atsiranda neprotingasis skaičius, neturintis pabaigos. Gali artėti ir artėti prie jo, bet kad ir kiek skaičiuotum, galutinai taip ir nepasieksi.

– Ką gi, – pripažino Robertas, – tokie jau tie Bonačio skaičiai. Bet *kodėl* jie taip straksi apie tą keistąjį skaičių?

– Čia nieko ypatingo, – pareiškė senis. – Jie visi taip elgiasi.

– Kas tokie *visi?*

– Nagi ne tik Bonačio skaičiai, bet ir kiti. Imkim, pavyzdžiui, du paprasčiausius skaičius. Pasakyk bet kokius du, kurie tau pirmiausia šaus į galvą.

– Septyniolika ir vienuolika, – išpyškino Robertas.

– Gerai. O dabar sudėk juos.

– Galiu ir mintinai. Bus 28.

– Puiku. Dabar parodysiu tau ekrane, kas toliau:

11 + 17 = 28
17 + 28 = 45
28 + 45 = 73
45 + 73 = 118
73 + 118 = 191
118 + 191 = 309

– Supratau, – tarė Robertas. – Ir kas iš to?

– Darysim tą pat, ką darėm su Bonačio skaičiais. Dalysim. Imk ir pabandyk.

Ekrane vienas po kito sušvito Roberto renkami skaičiai ir jų dalmenys:

17 : 11 = 1,545 454 …
28 : 17 = 1,647 058 …
45 : 28 = 1,607 142 …
73 : 45 = 1,622 222 …
118 : 73 = 1,616 438 …
191 : 118 = 1,618 644 …
309 : 191 = 1,617 801 …

– Vėl tas beprotiškas skaičius, – šūktelėjo Robertas. – Nieko nesuprantu. Argi tą savybę turi visi skaičiai? Ar tikrai *visuomet* taip išeina? Pradėjus nuo bet kurių skaičių? Vis tiek, kad ir kokius pasirinkčiau?

– Žinoma, – patvirtino senasis burtininkas. – Beje, jei tik tau įdomu, parodysiu, kam dar yra lygu 1,618...

Ekrane pasirodė visai nei šis, nei tas:

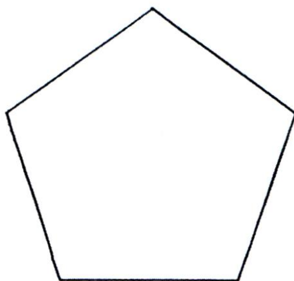
$$1{,}618\ldots = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ldots}}}}}}$$

– Trupmena, – išrėžė Robertas. – Šlykšti trupmena, nuo kurios akyse dvejinasi ir kuri niekad niekad nesibaigia! Nekenčiu trupmenų. O daktarui Oželiui jos patinka, jis labai mėgsta mus jomis pakankinti. Labai prašau, atstok nuo manęs su ta pabaisa!

– Nusiramink. Juk tai tik paprasčiausia grandininė trupmena. Bet argi ne nuostabu, kad tą beprotiškąjį skaičių 1,618... galima išperėti iš aibės vienetų, tolydžio vis mažesnių? Pripažink!

– Pripažįstu ką tik nori, bet apsaugok mane nuo trupmenų, ypač nuo tokių, kurios neturi pabaigos.

– Gerai jau, Robertai. Aš tik norėjau tave nustebinti. Jei grandininė trupmena tave erzina, darysim kitaip. Dabar štai braižau penkiãkampį:



Kiekvienos jo kraštinės ilgis lygus vienam.

– Kam vienam? – tučtuojau perklausė Robertas. – Vienam metrui, vienam centimetrui ar dar kam nors? Gal man išmatuoti?

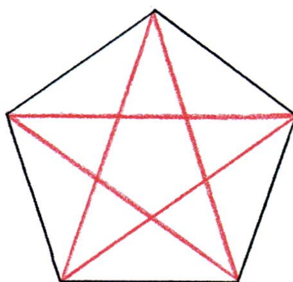
– Tai visai nesvarbu.

Senis vėl kiek pyktelėjo.

– Paprasčiausiai tarkim, kad kiekvienos penkiakampio kraštinės ilgis yra vienas kvangas. Juk galim tarp savęs taip susitarti, ar ne? Tinka?

– Gerai jau, tebūnie taip.

– Dabar į tą penkiakampį įbrėžiu raudoną žvaigždę:

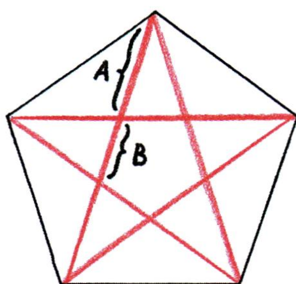


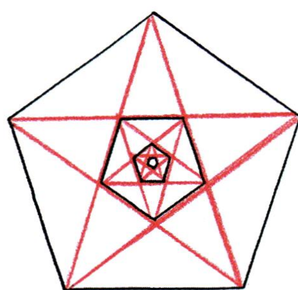
Ją sudaro penkios raudonos tiesės. Pasirink vieną iš tų tiesių, ir aš pasakysiu, koks jos ilgis. Lygiai 1,618... kvango, nei daugiau, nei mažiau.

– Tai siaubinga! Burtai, ir tiek!

Robertas buvo apstulbęs. Skaičių kipšas patenkintas šypsojosi.

– Žinok, – kalbėjo jis, – tai dar toli gražu ne viskas. Žiūrėk, dabar imam tą žvaigždę ir išmatuojam dvi raudonas atkarpas, kurias aš pažymėjau A ir B:





– A yra šiek tiek ilgesnė už B, – nustatė Robertas.

– Verčiau pasakysiu tau iš karto, kiek ji ilgesnė, kad tau nebūtų galvosūkio. A yra lygiai 1,618... karto ilgesnė už B. Beje, galėtume žaisti ir žaisti, kaip

jau žinai, iki begalybės, nes mūsų žvaigždė sudaryta panašiai kaip snaigė: raudonojoje žvaigždėje slypi dar vienas juodas penkiakampis, juodajame penkiakampyje – vėl raudona žvaigždė ir taip toliau.

– Ir kaskart išlįs tasai prakeiktas neprotingasis skaičius? – paklausė Robertas.

– Tu tai pasakei. Jei tau dar negana...

– Man niekuomet negana, – užtikrino Robertas. – Tai visai įdomu!

– Kad jau taip, tada vėl paimk savo užrašų knygelę. Surink tą prakeiktąjį skaičių. Aš tau jį padiktuosiu:

1,618 033 989...

Gerai. Dabar atimk iš jo 0,5:

1,618 033 989...-0,5
=1,118 033 989...

Skirtumą padaugink iš dviejų:

1,118 033 989...×2
=2,236 067 978...

Taigi, o dabar rezultatą pašokdink, tai yra padaugink iš jo paties. Tam reikalui yra specialus klavišas, pažymėtas x^2:

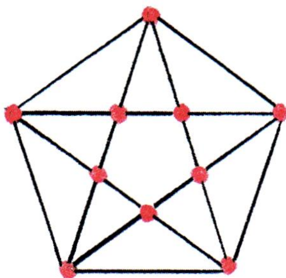
$2{,}236067977...^2 = 5{,}000\ 000000$

– Penki, – sušuko Robertas. – Neįtikima! Kaipgi čia išeina penki? Lygiai penki?

– Taigi, – gardžiuodamasis tarė Skaičių kipšas, – čia ir vėl susiduriam su savo penkiãkampiu ir penkiakampè raudona žvaigžde jo viduje.

– Tikras šėtono pramanas, – įsiterpė Robertas.

– O dabar pažymėsim keletą mazgų toje žvaigždėje. Visur, kur tik linijos susikerta arba susieina, nupiešim mazgą:



Nagi suskaičiuok, kiek yra tų mazgų.

– Dešimt, – atsakė Robertas.

– O dabar suskaičiuok baltuosius plotelius.

Robertas priskaičiavo jų vienuolika.

– Dar mums reikia žinoti, kiek yra linijų – atkarpų, jungiančių mazgus.

Čia Robertas kiek užtruko, nes skaičiuodamas kluptelėjo, bet galiausiai nustatė, kad tų linijų yra 20.

– Visai teisingai, – patvirtino senolis. – O dabar skaičiuojam:

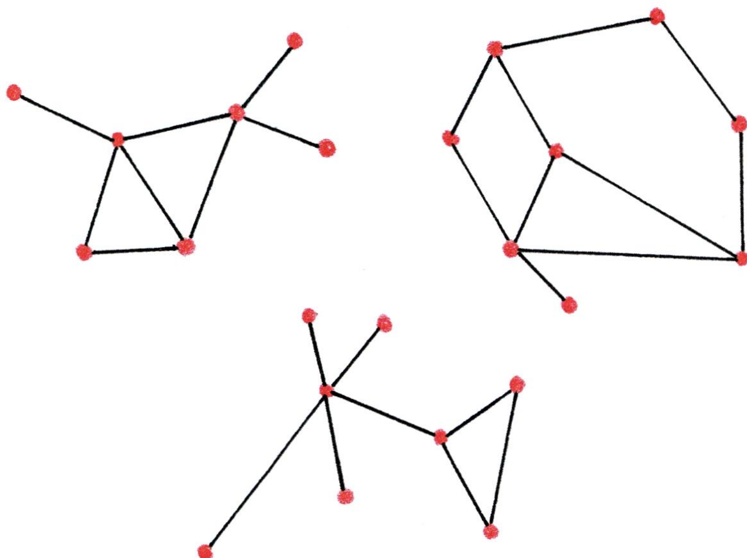
$$10 + 11 - 20 = 1$$
$$(M + P - L = 1)$$

Kai sudedam mazgus ir plotelius ir iš jų sumos atimam linijas, lieka 1.

– Ir kas iš to?

– Gal manai, kad ta išvada tinka tik mūsų penkiakam̃pei žvaigždei? Ogi ne! Įdomiausia, kad vienetas lieka *visada,* kad ir kokią figūrą paimtum. Ji gali būti net sudėtingiausia ir netaisyklingiausia. Imk ir pabandyk. Nubraižyk bet ką ir įsitikink.

Kipšas įbruko Robertui į ranką kompiuterį, ir vaikinas pele nubraižė kino ekrane:

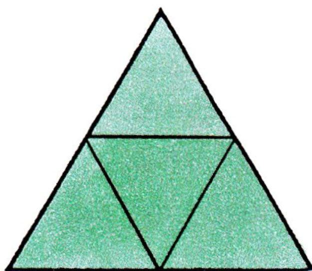


– Gali nesivarginti, – tarė senolis. – Aš jau suskaičiavau. Pirmoji figūra turi septynis mazgus, du plotelius, aštuonias linijas. Išeina 7 + 2 – 8 = 1. Antroji figūra: 8 + 3 – 10 = 1. Trečioji: 8 + 1 – 8 = 1. Kiekvieną kartą tas pats vienetas!

Beje, tai galioja ne tik plokščioms figūroms. Ta pati taisyklė tinka ir kubams, piramidėms arba šlifuotiems briliantams. Tik tuo atveju liekana bus ne 1, o 2.

– Įdomu būtų pamatyti.

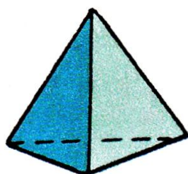
– Ana tas daiktas, kurį dabar matai ekrane, yra piramidė:



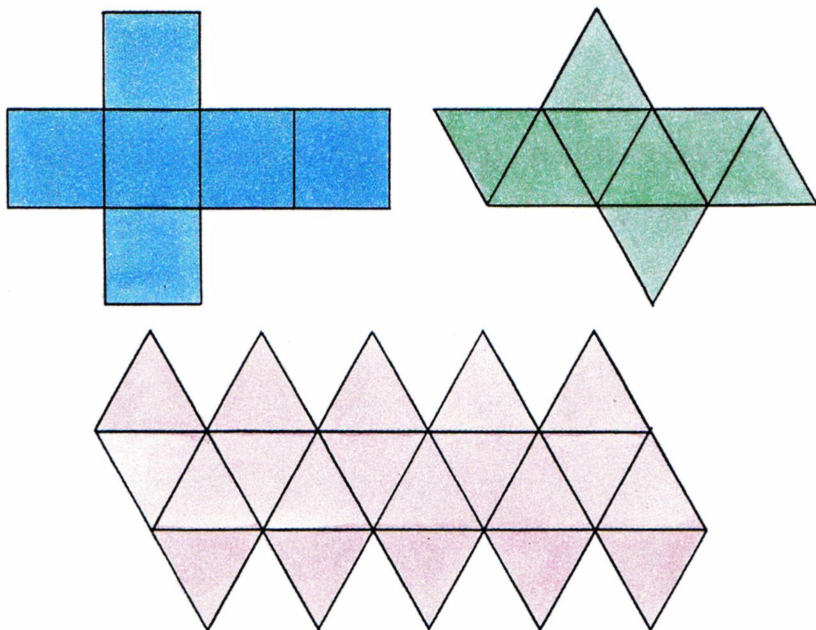
– Kokia jau čia piramidė, – nesutiko Robertas. – Paprasčiausiai keletas trikampių.

– Sakykim, bet kas išeis, jeigu juos iškirpsi ir sulankstęs suklijuosi?

Ir kaipmat ekrane pasirodė rezultatas – neprireikė nei žirklių, nei klijų:

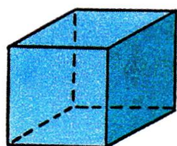
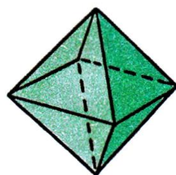
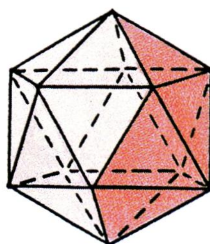


– Tą patį gali padaryti ir su šiomis figūromis, – tarė senolis ir nubraižė ekrane tris skirtingas išklotines:

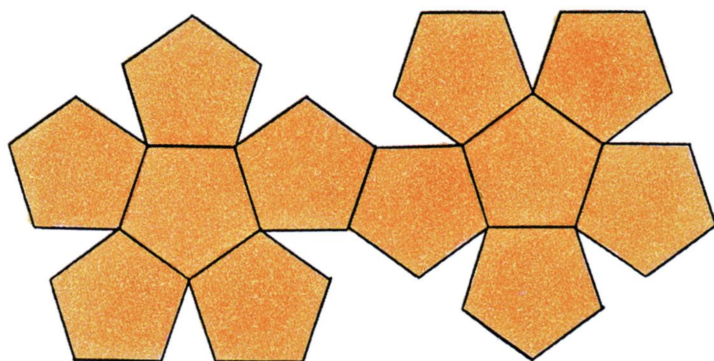


– Anokia čia gudrybė! – tarė Robertas. – Man yra tekę daryti ir sudėtingesnių modelių. Iš pirmosios išklotinės, jeigu ją iškirptum ir suklijuotum, išeitų kubas. O kas iš kitų dviejų?

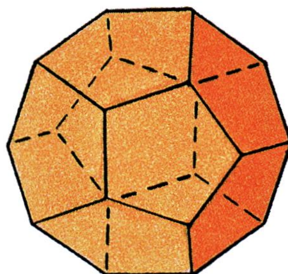
– Štai tie daiktai, kuriuos tada gautum: dviguba piramidė su dviem viršūnėmis – viena aukštyn, kita žemyn – ir bemaž apvalus sviedinys iš dvidešimties visai vienodų trikampių:

Galėtum net futbolo kamuolio modelį vien iš penkiakampių sulipdyti. Plokščia jo išklotinė atrodo štai taip:

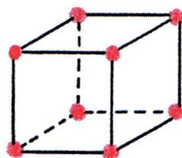


O suklijavus briaunas – šitaip:



– Neblogai, – pripažino Robertas. – Gal reikės susimeistrauti tokį daikčiuką.

– Tik ne dabar. Šiuo metu norėčiau grįžti prie mūsų žaidimo su mazgais, linijomis ir ploteliais. Pradžioje paimkim kubą, tai bus paprasčiausia:



Robertas suskaičiavo 8 mazgus, 6 plotelius ir 12 linijų.

– 8 + 6 – 12 = 2, – paskelbė jis.

– Visuomet du ir du! Kad ir koks šleivas kreivas ar sudėtingas būtų daiktas, visada lieka du. Mazgų skaičius plius plotelių skaičius minus linijų skaičius lygu dviem. Geležinė taisyklė. Taip, mielasis, ji tinka modeliams, kuriuos suklijuoji iš popieriaus. Bet tinka ir briliantams tavo mamos žiede. Turbūt tiktų net ir snaigėms, bet kol viską suskaičiuosi, jos bus jau ištirpusios.

Senojo kipšo balsas tariant paskutinius sakinius skambėjo vis tyliau, vis dusliau. Mažoji kino salė aptemo, ekrane vėl ėmė snigti. Bet Robertas baimės nebejautė. Jis jau žinojo, kad sėdi šiltame kine, kur tikrai nesušalsi, nors akyse vis šviesėja ir baltėja.

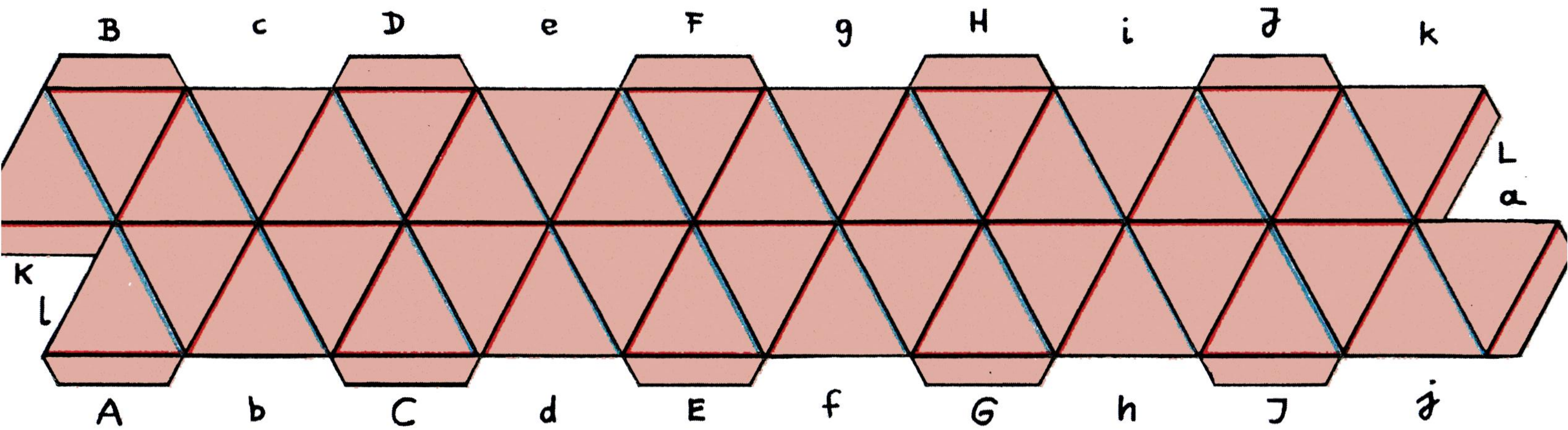
Pabudęs vaikinas apsižiūrėjo begulįs ne pusnyje, bet po stora balta antklode. Joje nebuvo nei mazgų, nei juodų linijų, nebūtum radęs ir jokio plokščio plotelio; žinoma, nebuvo ji ir penkiakam̃pė. Dingo, be abejo, ir gražusis sidabriškai pilkas kompiuteris.

O koks gi tas nelemtasis skaičius? Vienas kablelis šeši, tiek jis dar prisiminė, o kas toliau – pamiršo.

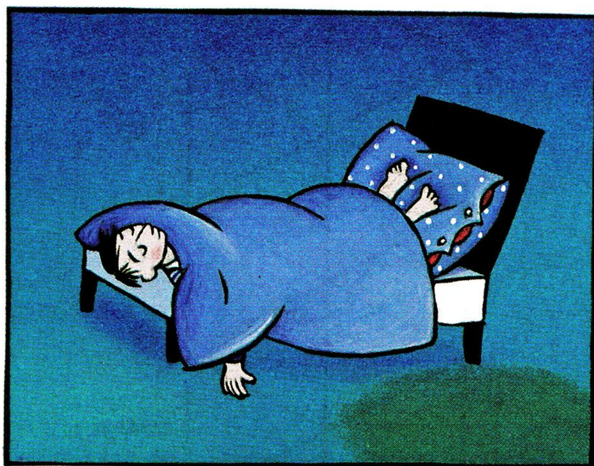
Kam nestinga kantrybės ir kas moka naudotis žirklėmis ir klijais, tas tegul pats pabando pasidaryti modelius pagal ankstesniuose puslapiuose pateiktas išklotines, sudarytas iš trìkampių, ketùrkampių ir penkiãkampių. Žinoma, teks pakraščiuose pripiešti siauras juosteles, kad būtų galima iškirptas figūras suklijuoti.

Jei padirbote visus penkis modelius ir jums dar nenusibodo, galite pasidaryti dar vieną labai įmantrų daikčiuką. Žinoma, tik jei tikite, kad jums nepristigs kantrybės, ir jei dirbsite labai tiksliai! Paimkite didelį lakštą (ne mažesnį kaip 35 × 20 cm) standaus popieriaus (bet ne kartono) ir kuo tiksliausiai perpieškite jame figūrą, atvaizduotą kitame puslapyje. Kiekviena daugybės trikampių kraštinė turi būti lygiai tokio pat ilgio kaip visos kitos. Tą ilgį pasirenkate patys; geriausia imti 3 ar 4 cm (arba vieną kvangą). Paskui visą figūrą iškirpkite. Per raudonąsias linijas pagal liniuotę lenkite popierių aukštyn (į save), per mėlynąsias – žemyn (nuo savęs). Dabar viską suklijuokite: iš pradžių juostelę B su trikampiu b, C – su c ir taip toliau, o pačioj pabaigoj – A su a. Kas išeis? Magiškas žiedas iš dešimties mažų piramidžių. Galėsite jį sukti pirmyn arba atgal (tik atsargiai!) ir tada regėsite kaskart vis kitą penkiãkampį ir penkiakam̃pę žvaigždę. Beje, atspėkite, kiek bus suskaičiavus visus mazgus (arba kampus), pridėjus visų plotelių skaičių ir atėmus linijų skaičių:

$$M + P - L = ?$$


B
c
D
e
F
g
H
i
J
k
L
a
K
l
A
b
C
d
E
f
G
h
J
j

Vienuolikta naktis



Buvo jau beveik sutemę. Robertas dūmė per miesto centrą, lėkė per nepažįstamas aikštes ir gatves. Bėgo kiek įkabindamas, nes jam ant kulnų mynė dr. Oželis, protarpiais tiek priartėdamas, kad Robertas girdėdavo jį šnopuojant. „Stok!“ – šaukė dr. Oželis, ir Robertas dar pridėjo garo, kad tik paspruktų, nors nežinojo, nei kodėl mokytojas jį vejasi, nei kodėl reikia nuo jo bėgti. Nesučiups jis manęs, galvojo vaikinas. Jis juk už mane daug storesnis!

Bet pasiekęs kitos gatvės kampą Robertas pamatė dar vieną daktarą Oželį atbėgant iš kairės. Vaikinas pasileido kiek kojos neša per sankryžą, nors degė raudona šviesa. Ir tada išgirdo kelis balsus jam įkandin šaukiant:

– Robertai, sustok! Juk mes norim tau tik gero.

Dabar jį jau vijosi keturi ar penki Oželiai. Iš šoninių gatvių išnirdavo vis daugiau mokytojų, panašių

į Roberto persekiotoją kaip du vandens lašai. Kai kurie bėgo jau net priešpriešiais.

Robertas ėmė šauktis pagalbos.

Staiga jį pačiupo kaulėta ranka ir nutempė iš gatvės į stiklinį pasažą. Ačiū Dievui! Tai buvo Skaičių kipšas. Jis šnipštelėjo bėgliui:

– Eikš! Čia yra privatus liftas, keliantis iki pat viršutinio aukšto.

Visos lifto kabinos sienos buvo veidrodinės, tad Robertas matė begalę skaičių kipšų ir vaikinų, visai tokių pat kaip Robertas. Čia man už tai, pamanė jis, kad prasidėjau su tomis begalinėmis aibėmis!

Šiap ar taip, Oželių balsai iš gatvės čia nesiekė. Robertas ir Skaičių kipšas bematant atsidūrė penkiasdešimtame aukšte. Lifto durys be garso atsivėrė, ir juodu išėjo į prašmatnią stogo terasą.

– Visada apie tokią svajojau, – prisipažino Robertas, kai jie susėdo į supamąjį suolą.

Apačioj, gatvėj, buvo matyti minia žmonių; iš aukštai jie atrodė ne didesni už skruzdėles.

– Niekada nemaniau, kad pasaulyje tiek daug daktarų Oželių, – atsiduso Robertas.

– Na ir kas! Tau nėra ko jų bijoti, – užtikrino senolis.

– Niekada nemaniau, kad pasaulyje tiek daug daktarų Oželių, – atsiduso Robertas.
– Tau nėra ko jų bijoti, – užtikrino senolis.

– Šitaip atsitinka turbūt tik sapne, – sumurmėjo Robertas. – Jei nebūtum laiku pasirodęs, nebeįstengčiau suregzti nė vienos protingos minties.

– Tam aš ir esu. Čia mudviem niekas netrukdys. Na tai kas tave kamuoja?

– Aš visą savaitę, nuo pat praėjusio susitikimo, svarsčiau, kaip siejasi visa tai, ką tu man rodei. Teisybė, tu išmokei mane visokiausių gudrybių. Bet man kyla klausimas: *kodėl?* Kodėl tie fokusai pavyksta? Pavyzdžiui, tas prakeiktasis skaičius? Arba tas penketas? Kodėl kiškiai elgiasi taip, lyg žinotų, kas yra Bonačio skaičius? Kodėl neprotingieji skaičiai niekuomet nesibaigia? Ir kodėl taip, kaip tu sakai, būna *visada?*

– Ak štai kas, – tarė Skaičių kipšas. – Tau nebegana žaisti su skaičiais? Tu nori žinoti, kas už jų slypi? Perprasti žaidimo taisykles? Atskleisti visumos prasmę? Vienu žodžiu, keli klausimus kaip tikras matematikas.

– Ne todėl, kad laikyčiau save matematiku. Dalykas tas, kad tu man kaskart ką nors *parodydavai,* bet vis be *įrodymų.*

– Tiesa, – pripažino senasis kipšas. – Atleisk man, bet taip jau yra. Ką nors parodyti lengva ir

malonu. Spėlioti – irgi neblogai. Išbandyti, ar spėjimas teisingas, – dar geriau. Tą mes ir darėm daugybę kartų. Bet to, deja, nepakanka. Reikia dar ir įrodyti. Štai net ir tu jau norėtum, kad viską tau įrodyčiau.

– Taip. Nes kai kurie dalykai, kuriuos esi sakęs, man atrodo savaime aiškūs. Bet kitais atvejais negaliu suprasti, kaip čia yra ir kodėl taip, o ne kitaip.

– Vienu žodžiu, tu nepatenkintas. Tai gerai. Gal manai, kad toks skaičių kipšas, kaip aš, kada nors būna patenkintas tuo, ką atrado? Niekuomet! Todėl mes visada ieškom naujų įrodymų. Mąstyk, gilinkis, suk galvą – ir taip be pabaigos. Bet kai mums pagaliau nušvinta tiesa, – o kastis ligi jos tenka ilgai, matematikoje šimtas metų greit pralekia, – tada mes, aišku, džiaugiamės it geležėlę radę. Tada jau mes laimingi.

– Perdedi. Negalimas daiktas, kad įrodyti būtų taip sunku.

– Tiek tu ir teišmanai. Net kai tau rodosi, jog tą dalyką jau perpratai, gali atsitikti, kad tik pasitrini akis ir pamatai: čia dar slypi toks vienas kabliukas.

– Pavyzdžiui?

– Turbūt manai, kad dėl šuolių tau viskas aišku. Juk taip, regis, paprasta nuo 2 pereiti prie 2 × 2, o nuo 2 × 2 – prie 2 × 2 × 2.

– Žinoma. 2^1, 2^2, 2^3 ir taip toliau. Kas čia sunkaus?

– Taigi, bet kas bus, jei šokdinsi nuliniu šuoliu? 1^0, 8^0 arba 100^0? Kiek gausi? Nori, pasakysiu tau? Gal juoksies, bet, žinok, visada išeina vienas:

$$1^0 = 1, \quad 8^0 = 1, \quad 100^0 = 1$$

– Kodėl? – nustebo Robertas.

– Geriau neklausk! Galėčiau tau įrodyti, bet bijau, kad tada tu išprotėtum.

– Tik pamėgink! – įniršo Robertas.

Bet ne taip lengva išmušti iš vėžių senąjį Skaičių kipšą!

– Ar esi kada bandęs, – paklausė jis, – pereiti sraunią upę?

– Taip, prisimenu, – atšovė Robertas. – Labai gerai prisimenu!

– Plaukte neperplauksi, kadangi srovė kaipmat nuneštų. Bet upės vidury riogso keletas stambių riedulių. Ką tu darytum?

– Ieškočiau akmenų, kyšančių iš vandens taip arti vienas kito, kad galėčiau šokinėti nuo akmens

ant akmens. Jei peršokčiau, pasiekčiau kitą krantą. Jei ne, taip ir stypsočiau upės vidury.

– Lygiai taip pat atsitinka ir ieškant įrodymų. Bet kadangi mes per porą tūkstantmečių jau išmėginom visus galimus būdus pereiti per upę, tai tau nebereikia pradėti visko iš naujo. Iš vandens jau kyšo gausybė akmenų, kuriais gali pasikliauti. Jie išbandyti jau milijonus kartų. Neslidūs, nekliba, drąsiai gali ant jų stotis. Jeigu tau šovė galvon gera mintis, drąsus spėjimas, dairaisi artimiausio patikimo akmens. Jei randi, šokinėji tol, kol pasieki saugų krantą. Tik būk atidus – žiū, ir kojų nesušlapsi.

– Taigi, – pritarė Robertas. – Bet ar gali man pasakyti, kur *yra* tas saugus krantas, jei mane domina skaičiai, penkiakampiai arba šuoliai?

– Geras klausimas, – sutiko Skaičių kipšas. – Krantas – tai keli teiginiai, tokie paprasti, kad paprastesnių jau ir būt negali. Jei ligi jų prieini, vadinasi, pasiekei tikslą. Tai ir yra įrodymas.

– Ir kokie būna tie teiginiai?

– Še tau pora pavyzdžių. Po kiekvieno paprastojo skaičiaus, vis tiek, ar 14, ar 14 milijardų, tuoj pat eina vienas – tik vienas! – paprastasis skaičius, gaunamas pridėjus vienetą. Arba štai: taško neįmano-

– Kiekvienąsyk šokdamas turi būti velnioniškai atidus, – įspėjo senasis kipšas. – Akmenys tolokai vienas nuo kito. Žiūrėk, kad neįkristum į vandenį.

ma padalyti, nes jis neturi matmenų – nei ilgio, nei pločio. Arba dar: per du taškus plokštumoje galima nubrėžti tik vieną tiesę ir ji tęsis be galo į abi puses.

– Tai man aišku, – tarė Robertas. – Ir tu gali, remdamasis tais keliais teiginiais, kaip tais akmenimis, nušokuoti ligi nelemtųjų skaičių arba Bonačio skaičių?

– Lengvai. Ir dar daug toliau. Tik žengiant kiekvieną žingsnį reikia būti be galo akylam. Visai kaip bandant pereiti sraunią upę. Kai kurie akmenys yra per toli vienas nuo kito, tapo tarp jų nebeperšoksi. O jei vis dėlto bandysi, įkrisi į vandenį. Kartais galėsi priartėti prie tikslo tik aplinkkeliu, gerokai vingiuodamas, o kitąsyk kelio nebus iš viso. Gal tau ateis į galvą viliojanti mintis, bet negalėsi įrodyti, kad ji perspektyvi, kad neveda į aklavietę. Arba paaiškės, kad gerasis tavo sumanymas iš tiesų nėra geras. Turbūt dar prisimeni, ką rodžiau tau pačioj pradžioj? Kaip visus skaitmenis išvesti iš vieneto?

$$1 \times 1 = 1$$
$$11 \times 11 = 121$$
$$111 \times 111 = 12321$$
$$1111 \times 1111 = 1234321$$

Ir taip toliau. Atrodė, kad tuo keliu galima eiti kiek tik nori.

– Taigi, ir tu dar gerokai įniršai dėl mano žodžių, kad tas dalykas man įtartinas. O juk iš tiesų taip pasakiau tik norėdamas tave paerzinti, nes neturėjau apie tai nė menkiausio supratimo.

– Ir vis dėlto uoslė tavęs neapgavo. Žinok, esu bandęs šitaip skaičiuoti vis toliau, ir iš tikrųjų priėjęs iki

1 111 111 111 × 1 111 111 111

puoliau į balą – išėjo tikra skaitmenų makalynė. Supranti? Tas fokusas tarsi ir gerai atrodė, ir gerai sekėsi, tačiau kai nėra įrodymų, galiausiai viskas įstringa.

Kaip matai, net gudrus Skaičių kipšas kitąsyk ima ir paslysta. Prisimenu vieną tokį, vardu Jonas iš Mėnulio, kuriam buvo šovusi į galvą nuostabi idėja. Jis išreiškė ją formule, kuri, jo įsitikinimu, *visada* esanti teisinga. Tasai pamišėlis išbandė ją

milijardą penkis šimtus milijonų kartų – ir vis sėkmingai. Jis vos galo negavo dirbdamas milžinišku kompiuteriu – jam mat reikėjo nepalyginti didesnio tikslumo, negu norint apskaičiuoti nelemtąjį mūsų skaičių 1,618... – ir, žinoma, tikėjo, kad ir toliau visada taip seksis. Todėl darbštuolis Jonas patenkintas atsilošė ir leido sau pailsėti.

Tačiau neilgai trukus atsirado kitas skaičių kipšas – nebeprisimenu jo vardo, – jis skaičiavo dar toliau ir dar tiksliau, ir kas paaiškėjo? Kad Jonas iš Mėnulio klydo. Stebuklingoji jo formulė pasirodė esanti teisinga *beveik* visada, bet, deja, ne *visada.* Beveik, bet ne visai! Nepasisekė vargšui kipšui. Ir įklimpo jis ne kur kitur, o su pirminiais skaičiais. Tokie jau jie klastingi. O įrodyti ką nors visuomet velnioniškai sunku.

– Tikiu, – atsiliepė Robertas. – Net ir tada, kai tenka vargti su tais sumautais riestainiais. Imkime kad ir daktarą Oželį, kuris niekaip nesiliauja klausinėjęs, *kodėl* tiek ir tiek kepėjų sugaišta tiek ir tiek valandų, kol iškepa tiek ir tiek nepamainomų jo riestainių, – jis gali bet ką išvesti iš kantrybės, ir jo pavyzdžiai kur kas nuobodesni už tavuosius fokusus.

– Man rodos, tu neteisingai jį kaltini. Tavo daktarui Oželiui tenka per dienų dienas plūktis su jūsų namų darbais, jis negali šokinėti nuo akmens ant akmens kaip mes, be jokios programos, kaip tik mums į galvą šauna. Man jo, vargšelio, nuoširdžiai gaila. Beje, regis, jis jau nuėjo namo sąsiuvinių taisyti.

Robertas metė žvilgsnį žemyn, į gatvę. Tikrai, ten buvo tuščia ir tylu.

– Kai kurie mūsiškiai, – toliau šnekėjo senasis kipšas, – vargsta daug labiau nei jūsų Oželis. Antai vienas iš vyresniųjų mano kolegų, garsusis Anglijos lordas Ruselis, užsimanė sykį įrodyti, kad 1 + 1 = 2. Štai ant šio lapelio aš surašiau visą jo įrodymą:

$*54\cdot42.\ \vdash :: \alpha \in 2 . \supset :. \beta \subset \alpha . \,!\beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \in \iota``\alpha$

Dem.

$\vdash . *54\cdot4 . \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \mathrm{v} . \beta = \iota`x . \mathrm{v} . \beta = \iota`y . \mathrm{v} . \beta = \alpha : \exists ! \beta$

$[*24\cdot53\cdot56 . *51\cdot161] \quad \equiv : \beta = \iota`x . \mathrm{v} . \beta = \iota`y . \mathrm{v} . \beta = \alpha \quad (1)$

$\vdash . *54\cdot25 . \mathrm{Transp} . *52\cdot22 . \supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`x . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`y$

$[*13\cdot12] \supset \vdash : \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota`x . \alpha \neq \iota`y$ [redacted] (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota`x . \mathrm{v} . \beta = \iota`y :$

$[*51\cdot235] \quad \equiv : (\exists z) . z \in \alpha . \beta = \iota`z :$

$[*37\cdot6] \quad \equiv : \beta \in \iota``\alpha \quad (3)$

$\vdash . (3) . *11\cdot11\cdot35 . *54\cdot101 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}.$

$*54\cdot43 . \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54\cdot26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv x \neq y .$

$[*51\cdot231] \quad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13\cdot12] \quad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$

$\vdash . (1) . *11\cdot11\cdot35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 .$

$\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$

$\vdash . (2) . *11\cdot54 . *52\cdot1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}.$

– Brrr! – pasipurtė Robertas. – Baisu! Ir kam visa tai? Aš juk ir be to žinau, kad 1 + 1 = 2.

– Taip, tuo neabejojo ir lordas Ruselis, bet jis norėjo tai įrodyti. Matai, kaip nelengva tai gali būti.

Beje, yra daugybė problemų, kurios atrodo beveik tokios pat paprastos kaip 1 + 1 = 2, ir vis dėlto nežmoniškai sunku jas išspręsti. Tarkim, tu keliauji į Ameriką, kur turi dvidešimt penkis pažįstamus. Kiekvienas gyvena vis kitame mieste, ir tu nori visus juos aplankyti. Imi žemėlapį ir svarstai, kaip geriausia tai padaryti. Kaip nuvažiuoti kuo mažiau kilometrų, kad sutaupytum ir laiko, ir degalų? Koks maršrutas trumpiausias? Kaip išspręsti tokį uždavinį?

Skamba labai paprastai, ar ne? Bet galiu tave patikinti, kad jau daugelis atsikando dantis į tą problemą. Gudriausi skaičių kipšai bandė perkrimsti tą riešutėlį, bet padaryti to iki galo nepavyko dar nė vienam.

– Betgi kodėl? – stebėjosi Robertas. – Kas jau čia tokio sunkaus! Apsvarstau, kokios yra galimybės, nubraižau visus maršrutus žemėlapyje ir apskaičiuoju, kuris iš jų trumpiausias.

– Taip, – tarė senolis. – Sudarai tinklą, jungiantį dvidešimt penkis mazgus.

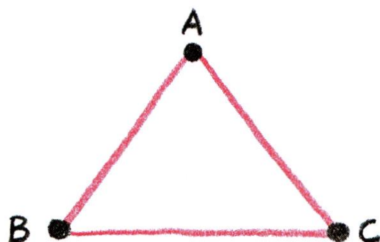
– Žinoma. Jei norėčiau aplankyti tik du draugus, maršrutas būtų tik vienas – iš A į B:

– Du. Galėtum važiuoti ir priešinga linkme – iš B į A.

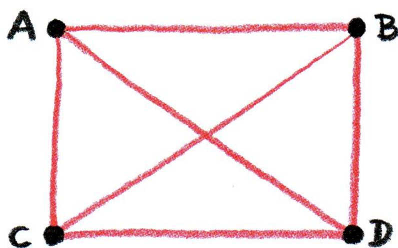
– Tai tas pat, – atsakė Robertas. – O jei draugų būtų trys?

– Tada turėtum jau šešias galimybes:

A ⟶ B ⟶ C
A ⟶ C ⟶ B
B ⟶ A ⟶ C
B ⟶ C ⟶ A
C ⟶ A ⟶ B
C ⟶ B ⟶ A



Beje, visi tie maršrutai yra vienodo ilgumo. O užsimojus aplankyti keturis draugus jau reikėtų rinktis:



– Taip, – sutiko Robertas, – bet aš visai neturiu noro skaičiuoti, kiek čia tų maršrutų.

– Nei daugiau, nei mažiau kaip dvidešimt keturi, – tarė Skaičių kipšas. – Manau, kad turėtum tiek pat galvosūkio kaip tada, kai reikėjo susodinti jūsų klasės mokinius. Juk prisimeni, kiek maišaties pridarė Albertas, Beata, Cecilija ir taip toliau, nes buvo daug skirtingų galimybių susėsti jiems į suolus vienokia ar kitokia tvarka.

– Viskas aišku! – susigaudė Robertas. – Kai trys mokiniai – galimybių trys bum!, kai keturi – keturios bum! ir taip toliau.

– Visai tiek pat variantų turėtum norėdamas aplankyti visus pažįstamus.

– Tai kurgi čia neišsprendžiama problema? Reikia tik apskaičiuoti, kiek yra skirtingų maršrutų, ir iš jų išsirinkti trumpiausią.

– Aha! – šūktelėjo senis. – Jeigu būtų taip paprasta! Bet jei pažįstamų 25, tai skirtingų maršrutų

jau 25!, o tai siaubingai didelis skaičius. Maždaug

1 600 000 000 000 000 000 000 000 000

Tau jokiu būdu nepavyktų visų jų išbandyti ir nustatyti, kuris trumpiausias. Net su didžiausiu kompiuteriu, koks tik yra, niekuomet nebaigtum to darbo.

– Vienu žodžiu, tai neįmanoma.

– Ir taip, ir ne. Tas klausimas mums jau seniai galvą kvaršina. Gudriausi skaičių kipšai išmėgino visokiausias gudrybes ir priėjo išvadą, kad kartais tai įmanoma, o kartais – ne.

– Gaila, – atsiduso Robertas. – Jei įmanoma tik kai kada, vadinasi, atlikta tik pusė darbo.

– O blogiausia tai, kad mes net negalim galutinai įrodyti, jog nėra *jokio* galutinio sprendimo. Jei įrodytume, būtų jau šis tas. Tada nebebūtų prasmės toliau ieškoti. Bent jau būtume įrodę, kad įrodymo nėra, o tai jau vis šioks toks įrodymas.

– Mmm, – numykė Robertas. – Vadinasi, net ir skaičių kipšams kartais tenka pasimurdyti. Man dėl to neramu. Aš jau maniau, kad jūs galite daryti stebuklus kiek tinkami.

– Taip tik atrodo. Tu net neįsivaizduoji, kiek sykių man jau nepavyko pereiti upės! Džiaugdavausi

bent jau tuo, kad pavyko nesušlapus kojų grįžti atgal į saugų krantą. Žinoma, aš anaiptol netvirtinu, kad esu pats išmintingiausias. Bet ir aukščiausios klasės skaičių kipšams (su vienu kitu tikriausiai dar susipažinsi) šitaip atsitinka. Tai tik reiškia, kad matematikoje visuomet bus neartų dirvonų. Laimei, reikėtų pridurti. Vadinasi, čia visada bus kas veikti, mielas Robertai. Todėl dabar jau turėsiu tave palikti. Mat rytoj rytą turėsiu nagrinėti simpleksų algoritmą, pritaikomą politopiniams paviršiams...

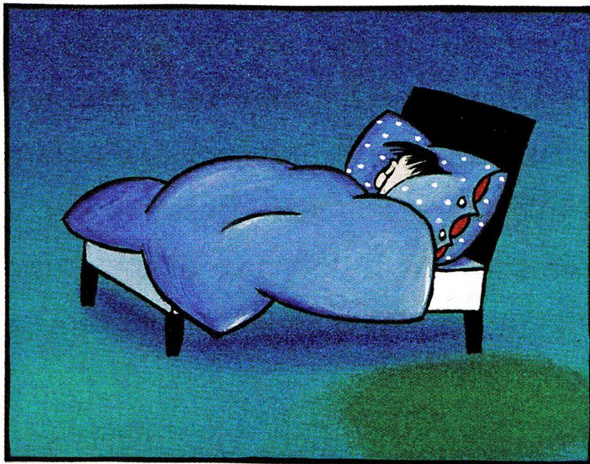
– Ką tokį? – perklausė Robertas.

– Paprasčiausią būdą išnarplioti painiavą. Todėl man reikia gerai išsimiegoti. Aš jau einu gulti. Labanakt!

Ir Skaičių kipšas dingo. Supamasis suolas, kuriame juodu sėdėjo, vis dar palengva siūbavo. Kas tie politopiniai paviršiai? O kas man darbo, galvojo Robertas. Šiaip ar taip, daktaro Oželio jau nebijosiu. Jei tik jis taikysis mane pačiupti, Skaičių kipšas tikrai padės man išsisukti.

Naktis pasitaikė šilta, ir malonu buvo nerūpestingai sapnuoti sėdint stogo terasoje. Robertas tik suposi ir apie nieką nebemąstė, kol visai įdienojo.

Dvylikta naktis



Robertas liovėsi sapnavęs. Nebeliko milžiniškų žuvų, kurios taikėsi jį praryti, jo kojomis neberopinėjo skruzdėlės, net ir dr. Oželis su visu pulku savo antrininkų jo nebesivaikė. Neslydo jis ir į bedugnę, nešalo, nebuvo įkalintas rūsyje. Vienu žodžiu, miegojo taip kietai kaip niekada.

Tai buvo puiku, bet ilgainiui darėsi nuobodoka. Kurgi dingo Skaičių kipšas? Gal jam šovė galvon gera mintis, bet nesiseka rasti įrodymo? O gal įklimpo į tuos polipų paviršius (ar kaip ten vadinasi tie daiktai, apie kuriuos jis kalbėjo pastarąjį kartą)?

O gal jis paprasčiausiai pamiršo Robertą?

Nejaugi sapnas baigėsi? Tai Robertui visai nepatiko. Mama stebėjosi, kad jis ištisas valandas sėdi sode ir braižo popieriuje mazgus bei tinklus – vis ieško, kaip greičiausiai aplankyti visus nesamus draugus Amerikoje.

– Verčiau imtumeis namų darbų, – burbėdavo motina.

Vienąsyk, kai Robertas per matematikos pamoką slėpė po suolu kažkokį popierių, jį prigriebė ir dr. Oželis.

– Ką ten turi, Robertai? Parodyk!

Bet Robertas spėjo suglamžyti popieriaus lakštą su dideliu margu skaičių trikampiu ir nusviesti jį savo bičiuliui Gustavui. Tai patikimas draugas. Jis jau pasirūpins, kad dr. Oželis nesužinotų, ką ten paslapčia veikia Robertas.

Vieną naktį jis vėl kietai įmigo, ničnieko nesapnavo ir todėl nė nepajuto, kaip kažkas garsiai beldžia į duris.

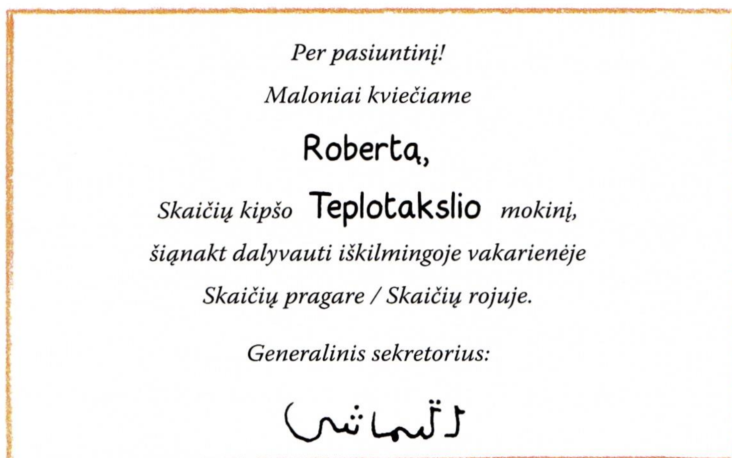
– Robertai! Robertai!

Vaikinas ne iš karto praplėšė akis. Tada išsiropštė iš lovos ir atidarė duris. Už jų stovėjo Skaičių kipšas.

– Na, pagaliau atsiradai. Aš tavęs jau pasigedau.

– Greičiau, – skubino jį senolis. – Eime! Turiu tau kvietimą. Štai!

Jis išsitraukė iš kišenės kortelę su auksiniais kraš-teliais ir kaligrafišku tekstu. Robertas perskaitė:



Per pasiuntinį!

Maloniai kviečiame

Robertą,

Skaičių kipšo Teplotakslio *mokinį,*

šiąnakt dalyvauti iškilmingoje vakarienėje

Skaičių pragare / Skaičių rojuje.

Generalinis sekretorius:

Parašas – neįskaitomas, lyg arabiškas ar persiškas.

Robertas šoko rengtis paskubom, lyg per gaisrą.

– Vadinasi, tavo vardas – Teplotakslis? Kodėl niekada man to nesakei?

– Tik nusipelniusiems dera žinoti, kuo vardu Skaičių kipšas, – atsakė senolis.

– Vadinasi, dabar jau ir aš esu toks?

– Beveik. Kitaip vargu ar būtum gavęs kvietimą.

– Keista, – sumurmėjo Robertas. – O kaip suprasti: Skaičių pragare / Skaičių rojuje? Juk arba vienur, arba kitur.

– Matai, ar Skaičių rojus, ar Skaičių pragaras, ar Skaičių dangus – iš esmės vienas ir tas pats, – paaiškino senasis.

Jis atlapojo langą, prie kurio stovėjo.

– Pats pamatysi. Ar jau pasirengęs?

– Taip, – patvirtino Robertas, nors jam buvo kiek nejauku.

– Tada lipk man ant kupros.

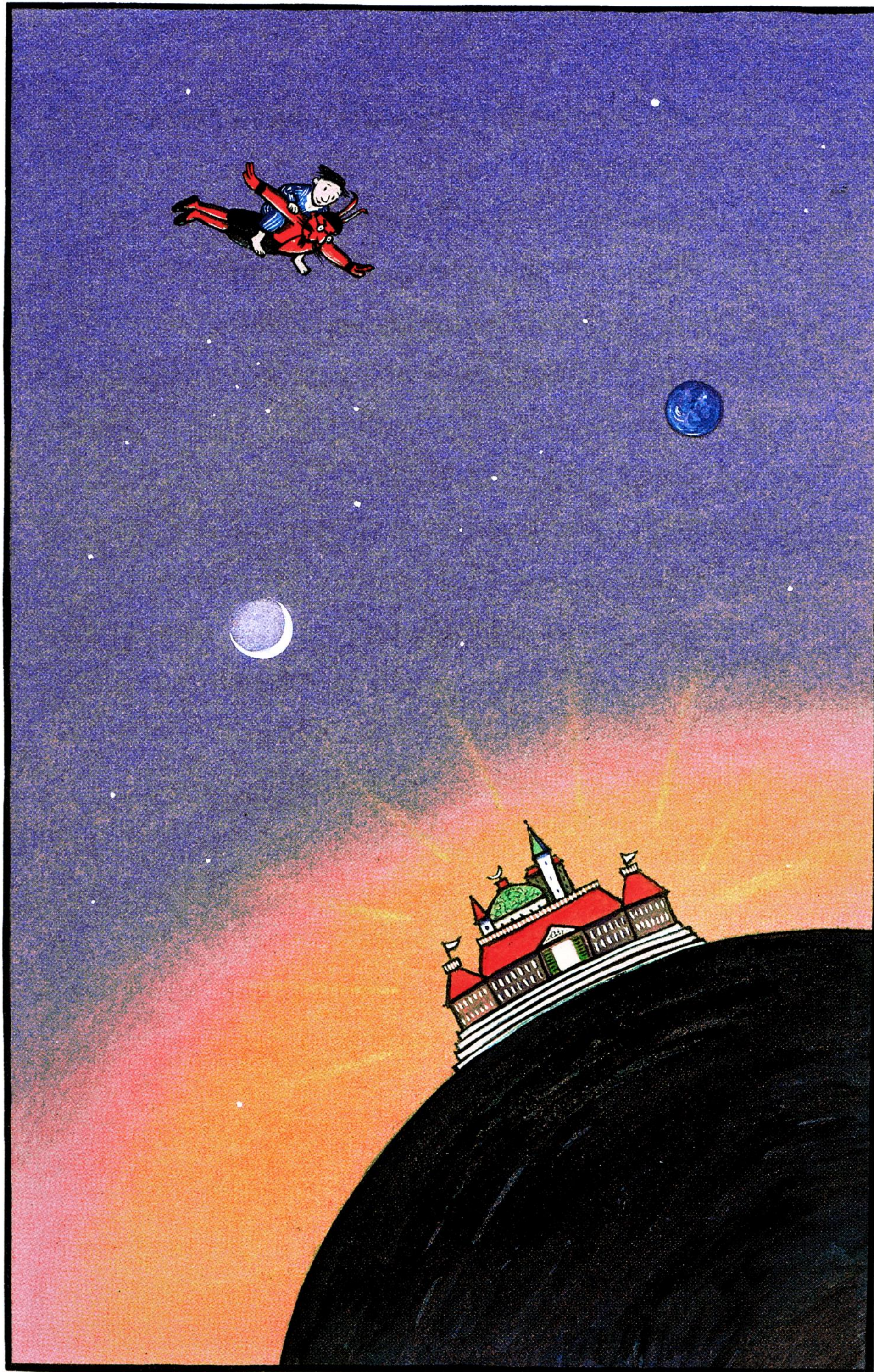
Robertas baiminosi būsiąs gerokai per sunkus prakauliam Skaičių kipšui, anaiptol nepanašiam į milžiną. Bet negi prieštaraus! Ir ką tu pasakysi: vos jis užsikorė seniui ant nugaros, šis galingu šuoliu pakilo į orą ir nulėkė sykiu su Robertu.

Tokie dalykai įmanomi tik sapne, pamanė Robertas.

O kodėl gi ne? Kelionė oru be variklio, neprisisegus saugos diržo, be paikų stiuardesių, kurios vis kiša man po nosim plastikinius barškaliukus ir spalvinimo sąsiuvinius, lyg būčiau trejų metų vaikas – šauni pramoga!

Ilgokai jie taip skrido be jokio garso. Pagaliau Skaičių kipšas grakščiai nutūpė didelėje terasoje.

– Štai mudu ir atvykom, – tarė jis ir nukėlė Robertą.



Vos jis užsikorė Skaičių kipšui ant nugaros, šis pakilo į orą ir nulėkė sykiu su Robertu. Tokie dalykai įmanomi tik sapne, pamanė Robertas.

Jiems prieš akis stūksojo prašmatnūs rūmai, visi skaisčiai apšviesti.

– Kurgi mano kvietimas? – sunerimo Robertas. – Ar tik nebūsiu palikęs jo namie?

– Nieko tokio, – nuramino jį senolis. – Čia įleidžiamas kiekvienas, kuris tikrai nori. Bet argi daug kas žino, kur tas Skaičių rojus! Todėl čionai pakliūva tik nedaugelis.

Iš tiesų aukštos sąvarinės durys buvo atlapos ir niekas netikrino lankytojų.

Juodu įėjo ir pateko į baisiai ilgą koridorių su begale durų. Dauguma jų buvo pravertos arba ir visai atdaros.

Robertas smalsiai žvilgtelėjo į pirmą kambarį. Teplotakslis pridėjo smilių prie lūpų ir šnipštelėjo: cit! Viduj sėdėjo ilganosis senučiukas baltutėliais plaukais ir šnekėjo pats su savim:

– Visi anglai meluoja. Tačiau kas bus, jeigu *aš* tai pasakysiu? Juk aš ir pats esu anglas. Vadinasi, ir aš meluoju. Bet tokiu atveju melagingas bus ir mano teiginys, kad visi anglai meluoja. O jeigu jie kalba tiesą, tada ir tai, ką pirma sakiau, turi būti tiesa. Vadinasi, vis dėlto mes meluojam!

Taip murmėdamas sau po nosim senukas vis tipeno ratu.

Skaičių kipšas pamojo Robertui, ir juodu nužingsniavo toliau.

– Čia vargšas lordas Ruselis, – paaiškino svečiui palydovas. – Tas pats, kuris, kaip jau žinai, įrodė, kad 1 + 1 = 2.

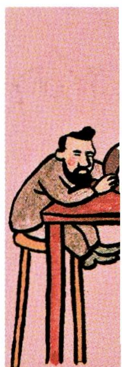
– Gal jam protelis kiek pasimaišęs? Nieko nuostabaus, juk jis jau labai senas.

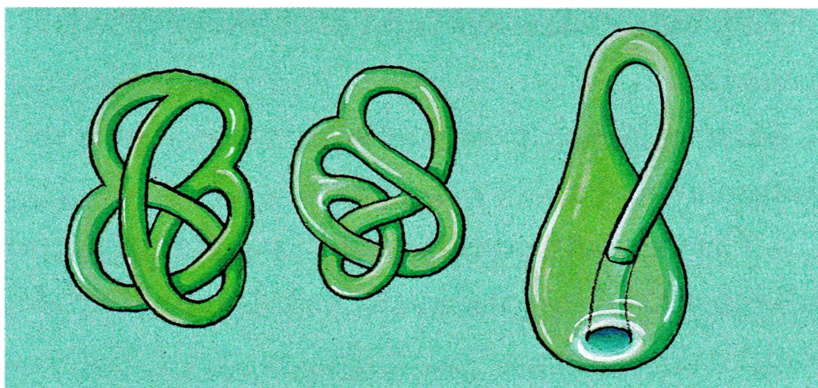
– Anaiptol! Šis vyras velnioniškai protingas. O ką reiškia – senas? Lordas Ruselis šiuose namuose vienas iš jauniausių, jam nėra nė 150 metų.

– Argi čia esama ir dar senesnių?

– Tuojau pats pamatysi, – atsakė Teplotakslis. – Skaičių pragare, kitaip sakant, Skaičių danguje, niekas nemiršta.

Jie priėjo kitas duris, plačiai atlapotas. Kambaryje tupėjo žmogelis, toks mažutukas, kad Robertas jį pastebėjo tik gerai apsižvalgęs. Patalpoje buvo pilna keistų daiktų. Kai kurie atrodė kaip dideli stikliniai riestainiai. Jie turėtų patikti daktarui Oželiui, pagalvojo Robertas, nors yra nevalgomi ir labai jau įdomiai suraityti. O kiek čia kiaurymių! Gretimai stovėjo žalio stiklo butelis.





– Gerai įsižiūrėk į tą butelį, – šnipštelėjo Skaičių kipšas Robertui. – Neįmanoma nustatyti, kur išorinė jo pusė, o kur vidinė.

Tokių daiktų nebūna, pagalvojo Robertas. Nebent sapne.

– Įsivaizduok, kad sumanei to butelio vidų nuspalvinti mėlynai, o išorę raudonai. Nepavyks! Niekur nėra krašto. Nežinotum, kur baigiasi raudonoji pusė ir prasideda mėlynoji.

– Ir jį išrado tas mažasis žmogeliukas? Juk jis pats lengvai tilptų tame savo butelyje.

– Tyliau! Žinai, kaip jis vadinasi? Daktaras Mažiulis! Eime toliau.

Ir juodu nužingsniavo pro daugybę kitų durų. Ant daugelio kabojo lentelė su užrašu: *Prašom netrukdyti!* Pagaliau jie sustojo prie plačiai atvertų kambario durų. Jame visas sienas ir baldus dengė dulkės.

– Tai ne paprastos dulkės, – paaiškino Teplotakslis. – Dulkelių čia daugiau, negu kas nors galėtų suskaičiuoti. Bet įdomiausia štai kas: jei adata pakabintum tų dulkių tiek, kiek telpa ant jos smaigalio, tai tame truputyje išsitektų visos dulkės, esančios šiame kambaryje. O čia profesorius Dainius: jis ir išrado tas dulkes.

Iš tiesų buvo girdėti, kaip to kambario šeimininkas, išblyškęs vyriškis smailia barzdele ir skvarbiu žvilgsniu, nervingai trepsi ratu ir niūniuoja sau po nosim:

– Begalybė, padauginta iš begalybės, lygu begalybei. Superbegalybė, padauginta iš begalybės, lygu superbegalybei.

Reikia mauti iš čia kuo greičiau, pagalvojo Robertas.

Dar už kelių žingsnių jo draugas mandagiai pabeldė į duris, ir pasigirdo malonus balsas: *Prašom!* Teisybę sakė Teplotakslis: visi rūmų gyventojai buvo tokie seni, kad Skaičių kipšas šalia jų atrodė tikras pienburnis. Tačiau du senoliai, kuriuos dabar išvydo Robertas, nustebino jį žvalia išvaizda. Vienas iš jų, toks didžiaakis, buvo su peruku.

– Malonėkit užeiti, ponai. Mano pavardė Pelėda, o štai čia – profesorius Gaustas.

Pastarasis rodėsi rūstus ir vos teikėsi žvilgtelėti į lankytojus. Robertas pamanė, kad jis nelabai džiaugiasi tuo vizitu.

– Mudu kaip tik kalbėjom apie pirminius skaičius, – tarė lipšnusis. – Jūs, be abejo, žinote, kad tai be galo įdomi tema.

– Tikrai, – pritarė jam Robertas. – Niekada nežinai, ko iš jų laukti.

– Tu visiškai teisus. Bet aš vis dar tikiuosi savo kolegos padedamas perprasti jų užmačias.

– O ar galėčiau sužinoti, kuo užsiima ponas profesorius Gaustas?

Bet ponas profesorius nesiteikė atskleisti, apie ką jis taip mąsto.

– Ponas Gaustas padarė nuostabiausią atradimą. Jis dabar nagrinėja visiškai naują skaičių rūšį. Kaip jūs juos pavadinot, bičiuli?

– i, – atsiliepė rūstusis matematikas ir neištarė daugiau nė žodžio.

– Tai tariamieji skaičiai, – paaiškino Teplotakslis. – Ačiū, ponai, ir dovanokit už sutrukdymą.

Ir juodu patraukė tolyn. Dirstelėjo į Bonačio kambarį, kuriame knibžėte knibždėjo kiškių. Už jo savo celėse darbavosi, plepėjo, miegojo indėnai ir

arabai, persai ir indai. Kuo giliau į rūmus, tuo senesni atrodė jų gyventojai.

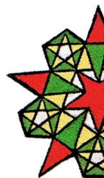
– Antai šitam, panašiam į maharadžą, – kalbėjo Teplotakslis, – yra ne mažiau kaip du tūkstančiai metų.

Ėjo jie ir ėjo pro menes, kaskart vis didesnes ir puošnesnes, kol atsidūrė priešais erdvią salę, lyg ir šventyklą.

– Tenai mudviem įžengti nevalia, – tarė Roberto palydovas. – Tas žmogus baltu drabužiu yra toks svarbus, kad menkas kipšiukas, toks kaip aš, neišdrįstų jo net užkalbinti. Jis kilęs iš Graikijos, ir visų jo išradimų nė jaučio odoj nesurašytum. Matai grindų plyteles? Vien penkiakampės žvaigždės ir penkiãkampiai. Jis norėjo iškloti jomis visas grindis, kad neliktų nė plyšelio, o kai jam nepavyko, išrado neprotinguosius skaičius. Šaknį iš penkių ir šaknį iš dviejų. Tikriausiai prisimeni tuos nelemtuosius skaičius?

– Žinoma, – patvirtino Robertas.

– Jis vardu Pitagoras, – tyliai pasakė Skaičių kipšas. – Žinai, ką jis dar pasiūlė? Žodį *matematika*. Štai mes ir atėjom.



Salė, į kurią juodu įžengė, buvo didžiausia iš visų, Roberto kada nors matytų, didesnė ir už katedrą, ir

už sporto halę, be to, kur kas gražesnė. Sienas puošė mozaikos, kiekviena vis kito rašto. Viršun vedė platūs paradiniai laiptai, tokie aukšti, kad jų galo nebebuvo matyti. Vienoj laiptų aikštelėj stovėjo auksinis sostas, bet tuščias.

Robertas buvo priblokštas. Jis nė neįsivaizdavo, kad skaičių kipšai gyvena tokioj prabangioj buveinėj.

– Koks jau ten pragaras, – tarė jis. – Čia tikras rojus!

– Nekalbėk taip. Žinia, skųstis būtų nuodėmė, bet retkarčiais, naktį, kai problema įstringa, nors iš proto kraustykis! Rodos, vienas žingsnis belikęs iki sprendimo – ir staiga pasijunti bestovįs prieš aklimą sieną. Tada tai jau tikras pragaras!

Robertas mandagiai nutylėjo ir ėmė dairytis. Tik dabar jis atkreipė dėmesį į ilgiausią stalą, pastatytą vidury salės. Palei sieną lūkuriavo tarnai, o visai šalia įėjimo stovėjo įspūdingas milžinas su kūju rankoje. Jis plačiai užsimojo ir smogė tuo kūju į didžiulį gongą. Garsas nuaidėjo per visus rūmus.

– Eikš, – tarė Teplotakslis. – Susirasim vietelę pačioj apačioj.

Juodu įsitaisė stalo gale ir žiūrėjo, kaip pro juos eina ir eina žymesni skaičių kipšai. Robertas pažino Pelėdą ir profesorių Gaustą, taip pat Bonačį, mat jam ant peties tupėjo kiškis. Tačiau dauguma pokylio dalyvių buvo jam visai nematyti. Štai iškilmingai įžygiuoja egiptiečiai, renkasi indai su raudona dėmele ant kaktos, traukia burnusais vilkintys arabai, abitais apsigaubę vienuoliai, juodaodžiai ir indėnai, turkai, nešini lenktais kardais, ir amerikiečiai, užsitempę mėlynus džinsus.

Robertas stebėjosi, kad skaičių kipšų yra tiek daug ir kad tarp jų taip maža moterų. Jų jis pamatė ne daugiau kaip šešias ar septynias, bet ir tos neatrodė ypač vertinamos.

– O kurgi moterys? Ar jos čia neįleidžiamos? – klausė jis.

– Seniau niekas nenorėjo apie jas nė girdėti. Matematika – vyrų darbas, tokia nuomonė vyravo rūmuose. Bet tikiuosi, kad ateity bus kitaip.

Daug tūkstančių svečių sėdosi į kėdes ir sveikinosi vieni su kitais. Paskui milžinas prie įėjimo vėl tvojo į gongą ir visi nuščiuvo. Ant didžiųjų laiptų pasirodė kinas šilko drabužiais ir sėdo į aukso sostą.

– Kas jis toks? – paklausė Robertas.

– Tai nulio išradėjas, – tylutėliai paaiškino Teplotakslis.

– Jis ir yra didžiausias?

– Antras pagal didumą, – pakuždėjo palydovas. – Visų didžiausias gyvena pačiam viršuje, kur baigiasi laiptai, debesyse.

– Ar jis irgi kinas?

– Kadgi aš žinočiau! Jo mes nė sykio nesam matę. Bet garbinam visi. Jis viešpatauja visiems skaičių kipšams, nes yra išradęs vienetą. Kas žino, gal jis net ne vyras. Gal net ir moteris!

Robertas buvo taip priblokštas to, ką matė, kad ilgai neišlemeno nė žodžio. Tuo tarpu tarnai pradėjo dengti stalą vakarienei.

– Betgi čia vien tortai, – šūktelėjo Robertas.

– Cit! Ne taip garsiai, vaikine. Mes čia valgome tik tortus, nes jie yra apskriti, o apskritimas – visų tobuliausia figūra. Paragauk.

Tokio skanumyno Robertui dar niekada nebuvo tekę valgyti.

– Jei norėtum sužinoti, kokio didumo yra toksai tortas, nuo ko pradėtum?

– Nežinau. Tu man apie tai nekalbėjai, o mokykloj mes vis dar tūpčiojam apie tuos riestainius.

– Tau prireiktų vieno tokio neprotingojo skaičiaus, ir kaip tik paties svarbiausiojo. Jį daugiau kaip prieš du tūkstančius metų atrado barzdyla, sėdintis antai ten, garbingiausioje stalo vietoje. Graikas. Jei ne jis, gal mes ir šiandien nežinotume, kokio didumo yra toksai tortas arba kad ir ratai, žiedai ir degalų rezervuarai. Apskritai visa, kas apskrita. Net Mėnulis ir mūsų Žemės rutulys. Be skaičiaus pi – nė iš vietos.

O salė jau ūžė kaip bičių avilys – taip gyvai šnekėjosi skaičių kipšai. Dauguma valgė pasigardžiuodami, tik kai kurie sėdėjo paskendę savo mintyse ir formavo kamuoliukus iš torto tešlos. Netrūko ir gėrimo, pilstomo, laimei, į penkiakampes krištolo taures, o ne į beprotiškus pono Mažiulio butelius.

Puotai baigiantis sužvangėjo gongas, nulio išradėjas pakilo nuo sosto ir pradingo aukštybėse. Vienas po kito stojosi ir kiti skaičių kipšai, iš pradžių,

žinoma, svarbiausieji, ir tipeno į savo kabinetus. Pagaliau liko besėdį tik Robertas ir jo globėjas.

Prie jų priėjo puošnia uniforma vilkintis ponas, kurio Robertas iki tol nebuvo pastebėjęs. Tai tikriausiai generalinis sekretorius, pamanė vaikinas, tas pats, kuris pasirašė man skirtą kvietimą,

– Taigi, – rūsčiai tarė aukštasis pareigūnas, – čia jūsų mokinys? Ar ne per jaunas, kaip jums atrodo? Ar jis bent jau moka kokių nors burtų?

– Dar ne, – atsakė Roberto bičiulis, – bet jei ir toliau darys tokią pažangą, tikriausiai netrukus mokės.

– Na, o kaip pirminiai skaičiai? Ar jis žino, kiek jų yra?

– Lygiai tiek pat, – pasiskubino atsakyti Robertas, – kiek ir paprastųjų, nelyginių arba pašokdintųjų.

– Gerai, tada atleisim jį nuo tolesnių kvotimų. Kuo jis vardu?

– Robertas.

– Atsistok, Robertai. Aš priimu tave į žemiausiąjį skaičių mokinių luomą ir tavo rangui patvirtinti apdovanoju tave penktosios klasės Pitagoro skaičių ordinu.

Sulig tais žodžiais jis užkabino naujokui ant kaklo sunkią grandinę su penkiakampe aukso žvaigžde.

– Labai ačiū, – tarė Robertas.

– Tas apdovanojimas, savaime aišku, turi likti paslaptis, – pridūrė generalinis sekretorius, nė nežvilgtelėjęs į Robertą apsisuko ant kulno ir pradingo.

– Taigi visai neblogai, – prabilo Roberto draugas ir mokytojas. – Dabar jau aš eisiu. Nuo šiol turėsi pats vienas kelio ieškotis.

– Kaip čia dabar? Juk tu negali manęs taip be niekur nieko palikti likimo valiai! – sušuko Robertas.

– Man labai gaila, bet privalau grįžti prie darbo, – atsakė senolis.

Robertas matė, kaip jis jaudinasi, ir pats susigraudino. Iki tol vaikinas nė neįtarė, koks artimas jam buvo tapęs Skaičių kipšas. Tačiau, žinoma, nei vienas, nei antras nenorėjo išsiduoti, tad Teplotakslis tepasakė:

– Sėkmės, Robertai.

– Lik sveikas, – atsakė Robertas.

Štai ir nebėra jo bičiulio. Robertas liko visai vienas milžiniškoje salėje prie tuščio stalo. Kaip, po velnių, aš dabar grįšiu namo? – svarstė jis. Grandinė, užkabinta ant kaklo, kas minutė rodėsi jam sunkesnė. Ir nuostabusis tortas skrandį slėgė. Gal reikėjo kiek mažiau gerti? Nejučiom jis susmuko krėsle, o dar po valandėlės jau miegojo taip kietai, lyg niekada ir nebūtų skridęs pro langą mokytojui ant kupros.

Pabudo jis, be abejo, savo lovoj, kaip visada. Mama purtė jį ir ragino:

– Paskubėk, Robertai. Jei tučtuojau neatsikelsi, pavėluosi į pamokas.

Na štai, pagalvojo Robertas, ir vėl tas pats. Sapne gali valgyti gardžiausią tortą, net, jei pasiseks, gausi aukso žvaigždę ant grandinės, bet vos pabundi, nieko nebelieka.

Tačiau kai jis dar su pižama stovėjo vonios kambaryje ir valėsi dantis, kažkas pakuteno jam krūtinę. Ir ką gi – pasirodo, ten ant plonos auksinės grandinėlės kabojo mažytė penkiakampė žvaigždutė.

Robertas netikėjo savo akimis. Šį kartą sapnas neišnyko kaip dūmas!

Rengdamasis jis nusikabino grandinėlę su žvaigždute ir paslėpė kelnių kišenėje, kad mama neimtų kvailai kamantinėti. „Kur gavai tą žvaigždutę? – būtinai paklaustų ji. – Padorus vaikinas papuošalų nenešioja!"

Negi ims jai aiškinti, jog tai – slaptas ordinas!

Mokykloje viskas buvo kaip visada, tik dr. Oželis atrodė labai pavargęs. Prisidengė laikraščiu, turbūt kad galėtų netrukdomas žiaumoti savo riestainius. Todėl ir sugalvojo uždavinį, kurį, jo nuomone, klasė turėtų spręsti iki pat skambučio.

– Kiek mokinių yra jūsų klasėje? – paklausė mokytojas. Stropioji Danielė tučtuojau atsistojo ir išpyškino: – Trisdešimt aštuoni.

– Gerai, Daniele. Dabar atidžiai klausykitės. Pirmas mokinys ten priekyje, kuo gi jis vardu, Albertas, taigi Albertas gaus *vieną* riestainį. Tu, Beata, būsi antra ir gausi du riestainius, Cecilija gaus tris, Danielė – keturis, ir taip iki pat trisdešimt aštunto. Dabar suskaičiuokit, kiek riestainių reikia, kad šitaip dalijant pakaktų visai klasei.

Tik Oželis ir gali sugalvoti tokį uždavinį! Velniai tave griebtų, ožy tu nelaimingas, pagalvojo sau Robertas, bet nutylėjo.

Dr. Oželis ėmė ramiai skaityti laikraštį, o mokiniai palinko prie skaičiavimo sąsiuvinių.

Robertas, žinoma, nėmaž negeidė spręsti to kvailo uždavinio kartu su visais. Sėdėjo sau ir žiūrėjo buku žvilgsniu.

– Kas tau, Robertai? Tu jau vėl užsisvajojai, – riktelėjo dr. Oželis. Vis dėlto jis mato, ką veikia mokiniai!

– Aš tuoj, – atsiliepė Robertas ir ėmė rašyti sąsiuvinyje:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \ldots$$

Dieve mano, kokia nuobodybė! Vos priėjęs iki vienuolikos jis jau susipainiojo. Ir atsitik tu man taip Pitagoro skaičių ordino kavalieriui, kad ir penktokui! Tada jam šovė į galvą, kad nebeturi žvaigždutės po kaklu – pamiršo ją kelnių kišenėje.

Vaikinas išsitraukė savo brangenybę ir slapčia, kad nepastebėtų dr. Oželis, pasikabino grandinėlę ant kaklo, į vietą. Ir jau po akimirkos sumojo, kaip šauniai išspręsti uždavinį. Ne veltui jis pažino trikampius skaičius! Kaip ten būdavo? Ir jis parašė sąsiuvinyje:

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \\
\hline
13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13
\end{array}
$$

$$6 \times 13 = 78$$

O jei galima taip padaryti su skaičiais nuo vieno iki dvylikos, tai turėtų būti galima ir nuo vieno iki trisdešimt aštuonių!

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots & 18 & 19 \\
38 & 37 & 36 & \ldots & 21 & 20 \\
\hline
39 & 39 & 39 & \ldots & 39 & 39
\end{array}
$$

$$19 \times 39 = ?$$

Robertas atsargiai išsitraukė po suolu iš kuprinės skaičiuotuvą ir suspaudinėjo:

$$19 \times 39 = 741$$

– Jau žinau, – šūktelėjo jis. – Tai visai lengva!

– Tikrai? – nustebo dr. Oželis ir nuleido laikraštį.

– 741, – visai tyliai tarė Robertas.

Visa klasė taip ir nuščiuvo.

– Iš kur tu žinai? – paklausė dr. Oželis.

– Ak, – atsiliepė Robertas, – tai juk išeina vos ne savaime. – Vaikinas palietė žvaigždutę po marškiniais ir dėkingas prisiminė Skaičių kipšą.

Įspėjimas!

Sapne viskas yra kitaip negu mokykloje arba moksle. Kai Robertas šnekasi su Skaičių kipšu, jie kartais pavartoja keistus posakius. Ir nieko nuostabaus, nes *Skaičių kipšas* – nepaprasta istorija.

Bet nemanykit, kad visi žmonės supras sapnų žodžius, kurie aniedviem išsprūsta iš lūpų! Pavyzdžiui, jūsų matematikos mokytojas arba jūsų tėvai. Jeigu jiems pasakysite *pašokdinau skaičių* arba *Gaustas,* jie nesupras, ką tai reiškia. Suaugusieji vadina tai visai kitaip: jie ne *šokdina,* bet *kelia laipsniu,* o *Gausto* pavardę rašo *Gausas. Neprotingieji skaičiai* matematikos vadovėliuose vadinami *iracionaliaisiais skaičiais,* ir jūsų mokytojas niekada nepasakys *penki bum!,* o pavartos tarptautinį žodį: *penkių faktorialas.*

Bet sapnuose tokių moksliškų terminų nebūna. Nė vienas žmogus nesapnuoja tarptautiniais žodžiais. Tad jeigu skaičių kipšai kalba vaizdais arba skaičius šokdina, užuot kėlę juos laipsniu, tai nėra koks vaikiškas maivymasis: sapnuose mes visi elgiamės kaip tinkami.

Tačiau per pamokas nemiegama ir retai kada svajojama. Todėl jūsų mokytojas teisus, jei kalba kaip viso pasaulio matematikai. Turite su tuo sutikti ir tuščiai nesiginčyti.

Vardų ir dalykų rodyklė

Jei žmogui, skaičiusiam šią knygą, vėliau prisireiks kokio nors joje paminėto dalyko ir jis nebeprisimins, kaip tas dalykas knygoje pavadintas, tai šioje rodyklėje greit jį susiras.

Šiame sąraše, surikiuotame abėcėlės tvarka, rasite ne tik Skaičių kipšo ir Roberto pavartotus sapnų žodžius, bet ir „teisingus", oficialius terminus, kuriuos vartoja matematikai. Jie išspausdinti paprastu šriftu, o sapnų žodžiai – *kursyvu.*

Beje, rodyklėje įrašyta ir keletas pavadinimų, kurių nėra knygos tekste. Tegul tai jūsų netrikdo! Mat gali atsitikti, kad *Skaičių kipšas* paklius į rankas kokiam matematikos mokytojui arba kitam suaugusiajam. Jiems ir skirti tokie įterpiniai: tegul turi gardaus juoko.

Enzensberger, Hans Magnus

En-115 Skaičių kipšas: sapnų knyga visiems, kurie bijo matematikos / Hans Magnus Enzensberger; iš vokiečių kalbos vertė Valdemaras Kvietkauskas; iliustravo Rotraut Susanne Berner. – Vilnius: Alma littera, 2006. – iliustr., 264 p.

ISBN 9955-24-322-8

Ši smagi knyga ne tik padės atsikratyti matematikos baimės, bet ir leis pajusti skaičių pasaulio žavesį.

UDK 51+830-93

Hans Magnus Enzensberger

SKAIČIŲ KIPŠAS

Iš vokiečių kalbos vertė *Valdemaras Kvietkauskas*
Redaktorė *Danutė Gadeikienė*
Maketavo *Ligita Plešanova*

Tiražas 3000 egz.
Išleido leidykla „Alma littera", A. Juozapavičiaus g. 6/2, LT-09310 Vilnius
Interneto svetainė: www.almalittera.lt
Spaudė Standartų spaustuvė, S. Dariaus ir S. Girėno g. 39, LT-02189 Vilnius